做题不能追求数量，而要讲究质量，要学会以点带面，多角度理解，只有这样才能跳出题海的怪圈.选择好题，选择成功！为此，我们特推荐以下习题，希望同学们能够融会贯通，学以致用，从多种角度分析思考，积极探索解题规律，摸索出获得最优解法的途径.

平面几何与立体几何第一轮复习测试题

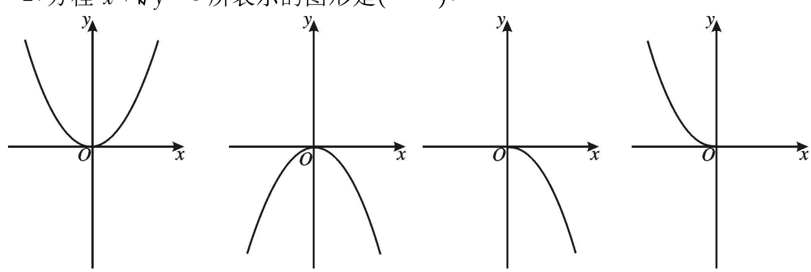
■河南　　任志兵

一、选择题

1.斜率为 2 的直线经过$(3,5)$、$(a,7)$、$(-1,b)$三点，则 a、b 的值是(　　).

A.$a=4,b=0$　B.$a=-4,b=-3$　C.$a=4,b=-3$　D.$a=-4,b=3$

2.方程 $x+\sqrt{y}=0$ 所表示的图形是(　　).



A　B　C　D

3.方程 $x(x^2+y^2-4)=0$ 与 $x^2+(x^2+y^2-4)^2=0$ 表示的曲线是(　　).

A.都表示一条直线和一个圆

B.都表示两个点

C.前者是一条直线和一个圆，后者是两个点

D.前者是两个点，后者是一直线和一个圆

4.圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上与直线 $x+y+1=0$ 的距离等于$\sqrt{2}$的点共有(　　)个.

A.1　B.2　C.3　D.4

5.方程 $\sqrt{1-x^2}=kx+2$ 有唯一解，则实数 k 的范围是(　　).

A.$k=\pm\sqrt{3}$　B.$-2<k<2$

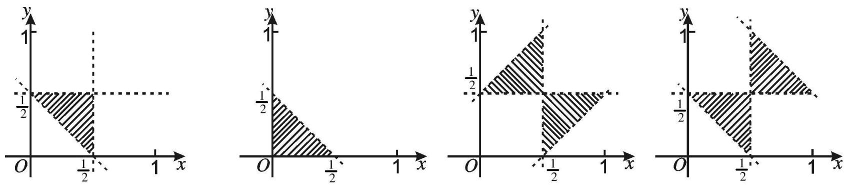
C.$k>2$ 或 $k<-2$　D.$k>2$ 或 $k<-2$ 或 $k=\pm\sqrt{3}$

6.设集合 $A=\{(x,y)\mid x、y、1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$，则 A 所表示的平面区域(不含边界的阴影部分)是(　　).

7.在坐标平面上，不等式组$\begin{cases}y\geqslant x-1,\\ y\leqslant -3|x|+1\end{cases}$所表示的平面区域的面积为(　　).

骐骥一跃，不能十步；驽马十驾，功在不舍；锲而舍之，朽木不折；锲而不舍，金石可镂.

——荀　况



A　　B　　C　　D

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

8. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$和椭圆$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,m>b>0)$的离心率互为倒数,那么以$a$、$b$、$m$为边的三角形是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形　　C. 直角三角形　　D. 形状不定

9. 直线$y=x+b$交抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2$于A、B两点,O为抛物线顶点,$OA\perp OB$,则b的值为(　　).

A. 2　　B. 0　　C. 1　　D. 4

10. 已知c是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$的半焦距,则$\dfrac{b-c}{a}$的取值范围是(　　).

A. $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $\left(-\dfrac{3}{4},-1\right)$　　D. $(-1,0)$

11. 已知$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$,$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$,$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$,点$Q$在直线$OP$上运动,则当$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$取得最小值时,点$Q$的坐标为(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right)$　　C. $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$

12. 正三棱锥底面边长为a,侧棱与底面所成角为60°,过底面一边作一截面使其与底面成30°的二面角,则此截面的面积为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$　　C. $\dfrac{1}{3}a^2$　　D. $\dfrac{3}{8}a^2$

二、填空题

13. 直线l经过二、三、四象限,l的斜率为k,倾斜角为α,则$k\cos\alpha$的取值范围是____.

14. 抛物线型拱桥顶距离水面2米,水面宽4米,当水上升1米时,水面宽将减少____米.

15. 图1是一个正方体的展开图,在原正方体中,有下列命题:

①AB与EF所在直线平行;

②AB与CD所在直线异面;

③MN与BF所在直线成60°角;

④MN与CD所在直线垂直.

风铃 才能不是天生的,可以任其自便的,而要钻研艺术请教良师,才会成才.
——歌　德

其中正确的序号是____.

16. 一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底都相切，已知这个球的体积是$\frac{32}{3}\pi$，那么这个三棱柱的体积是____.

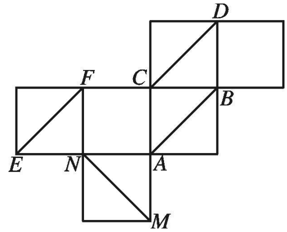


图 1

三、解答题

17. 已知甲、乙两煤矿每年的产量分别为 200 万吨和 300 万吨，这些煤需经过东车站和西车站两个车站运往外地. 东车站每年最多能运 280 万吨煤，西车站每年最多能运 360 万吨煤. 甲煤矿运往东车站和西车站的运费价格分别为 1 元/吨和 1.5 元/吨，乙煤矿运往东车站和西车站的运费价格分别为 0.8 元/吨和 1.6 元/吨. 煤矿应怎样编制调运方案，能使总运费最少?

18. 已知点 $A(1,0)$，圆$(x+1)^2+y^2=16$的圆心为 B，点 C 为圆上任意一点，求线段 AC 的垂直平分线 l 与线段 CB 的交点 P 的轨迹方程.

19. 如图 2，在斜边为 AB 的直角$\triangle ABC$ 中，过点 A 作 $AP\perp$平面 ABC，$\angle PBA=30°$，二面角 $B-AP-C$ 的大小为 θ，二面角 $A-BP-C$ 的大小为 φ，证明：$\tan\theta\cdot\tan\varphi$为定值.

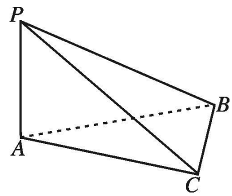


图 2

20. 如图 3，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，$AD=PD$，E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1)求证：$EF\perp$平面 PAB.

(2)设 $AB=\sqrt{2}BC$，求 AC 与平面 AEF 所成角的大小.

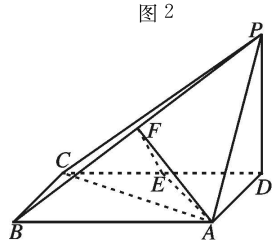


图 3

21. 如图 4，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，且 $AB\parallel CD$，$AB=AD=4$，$\angle BAD=60°$，$CD=2$，$A_1A=3$.

(1)求证：平面 $B_1BCC_1\perp$平面 ABC_1D_1.

(2)求二面角 B_1-AD_1-B 的平面角的正弦值.

22. 已知焦点在 x 轴上的双曲线 C 的两条渐近线过坐标原点且互相垂直，又知 C 的一个焦点与点 $A(1,\sqrt{2}-1)$关于直线 $y=x-1$ 对称.

(1)求双曲线 C 的方程.

(2)是否存在直线 $y=kx+b$ 与双曲线 C 交于 P、Q 两点，使 PQ 恰被点$\left(\frac{2}{3},1\right)$平分?

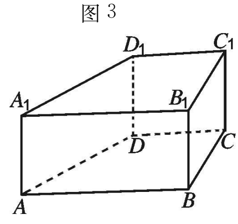


图 4

参考答案

1. C　2. D　3. C　4. C　5. D　6. A　7. B　8. C　9. A　10. D　11. C　12. D

13. $(0,1)$　14. $4-2\sqrt{2}$　15. ②④　16. $48\sqrt{3}$

17. 设甲煤矿向东车站运 x 万吨煤,乙煤矿向东车站运 y 万吨煤,那么总运费 $z=x+1.5(200-x)+0.8y+1.6(300-y)$(万元),即 $z=780-0.5x-0.8y$.

x、y 应满足 $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ 200-x\geqslant 0, \\ 300-y\geqslant 0, \\ x+y\leqslant 280, \\ (200-x)+(300-y)\leqslant 360. \end{cases}$

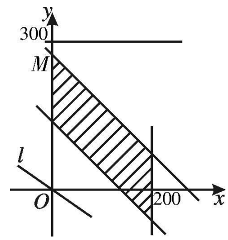


图 5

作出上面的不等式组所表示的平面区域,如图 5.

设直线 $x+y=280$ 与 y 轴的交点为 $M(0,280)$.

把直线 l:$0.5x+0.8y=0$ 向上平移至经过平面区域上的点 M 时,z 的值最小.

∵ 点 M 的坐标为 $(0,280)$,

∴ 甲煤矿生产的煤全部运往西车站、乙煤矿向东车站运 280 万吨向西车站运 20 万吨时,总运费最少.

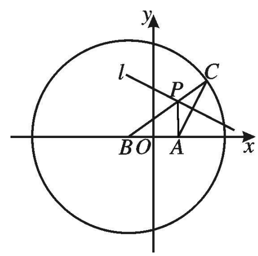


图 6

18. 如图 6,连接 PA,由 l 是线段 AC 的中垂线,得 $|PC|=|PA|$,则 $|PB|+|PA|=|PB|+|PC|=4$.

∴ 点 P 的轨迹是以 B、A 为焦点,以 4 为长轴长的椭圆.

∴ 点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

19. 过点 A 作 $AE\perp PB$ 于 E,过点 E 作 $EF\perp PB$ 交 PC 于 F,连接 AF,则 $PB\perp$ 平面 AEF,故 $PB\perp AF$. 易得 $BC\perp$ 平面 PAC,则 $BC\perp AF$. 由 $PB\perp AF$,$BC\perp AF$,$PB\cap BC=B$,得 $AF\perp$ 平面 PBC,则 $AF\perp EF$. 易得 $\angle BAC=\theta$,$\angle AEF=\varphi$,则 $\tan\theta=\frac{BC}{AC}$,$\tan\varphi=\frac{AF}{EF}$. 由 $AF\cdot PC=AP\cdot AC$,$\frac{EF}{BC}=\frac{PE}{PC}$,得 $AF=\frac{AP\cdot AC}{PC}$,$EF=\frac{PE\cdot BC}{PC}$,则 $\tan\varphi=\frac{AP\cdot AC}{PE\cdot BC}$,故 $\tan\theta\cdot\tan\varphi=\frac{AP}{PE}=2$.

20. 以点 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DP}$ 分别为 x、y、z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

(1) 不妨设 $BC=1$,$CD=k$,则 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},0\ \frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(0,k,0)$,$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$,故 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PA}=0$,即 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{EF}\perp PA$,从而 $EF\perp$ 平面 PAB.

(2) 不妨设 $BC=1$,则 $AB=\sqrt{2}$,$D(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(1,\sqrt{2},0)$、$C(0,\sqrt{2},0)$、$P(0,0,1)$、$E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$、$F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{2},0)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,1)$ 为平面 AEF 的一个法向量,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$,故 $x=-1$,$y=-\sqrt{2}$,即 $\boldsymbol{n}=(-1,-\sqrt{2},1)$. $\overrightarrow{AC}$ 与平面 AEF 所

成角的正弦值为$\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot n|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则所求角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

21.(1)在△ABD 中，由 $AB=AD=4$，$\angle BAD=60^{\circ}$，得△ABD 为正三角形，则 $BD=4$，$\angle BDC=60^{\circ}$. 又 $CD=2$，故 $BC=2\sqrt{3}$.

在△BCD 中，$BD^2=BC^2+CD^2$，则$\angle BCD=90^{\circ}$，即 $CD\perp BC$. 又 $AB/\!/CD$，故 $AB\perp BC$.

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp BB_1$，则 $AB\perp$平面 B_1BCC_1. 又 $AB\subset$平面 ABC_1D_1，故平面 $B_1BCC_1\perp$平面 ABC_1D_1.

(2)过 B_1 作 $B_1E\perp BC_1$，垂足为 E，过 E 作 $EF\perp AD_1$，垂足为 F，连接 B_1F. 由 $B_1E\perp BC_1$，平面 $B_1BCC_1\perp$平面 ABC_1D_1，得 $B_1E\perp$平面 ABC_1D_1.

由三垂线定理可知：$\angle B_1FE$ 为二面角 B_1-AD_1-B 的平面角.

在△B_1BC_1 中，$BB_1=3$，$B_1C_1=2\sqrt{3}$，则 $B_1E=\frac{BB_1\cdot B_1C_1}{\sqrt{BB_1^2+B_1C_1^2}}=\frac{6\sqrt{7}}{7}$.

在△AB_1D_1 中，$AB_1=AD_1=5$，$B_1D_1=4$，则 $B_1F=\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

故 $\sin B_1FE=\frac{B_1E}{B_1F}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

22.(1)由于双曲线 C 的两条渐近线过坐标原点且互相垂直，则两条渐近线方程为 $y=\pm x$，设双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=a^2$.

点 $A(1,\sqrt{2}-1)$关于 $y=x-1$ 的对称点为$(\sqrt{2},0)$，即双曲线 C 的一个焦点为$(\sqrt{2},0)$，则 $2a^2=2\Rightarrow a^2=1$.

故双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=1$.

(2)假设存在. 设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$. 由$\begin{cases}y=kx+b,\\x^2-y^2=1\end{cases}\Rightarrow(1-k^2)x^2-2kbx-b^2-1=0$. 由 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2}{3}$，得 $\frac{kb}{1-k^2}=\frac{2}{3}$. 又 $1=\frac{2}{3}k+b\Rightarrow b=1-\frac{2}{3}k$，则 $\frac{k}{1-k^2}\cdot\left(1-\frac{2}{3}k\right)=\frac{2}{3}\Rightarrow k=\frac{2}{3}$，此时 $b=\frac{5}{9}$.

那么直线 PQ 的方程为 $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}$.

经检验满足题意.

(责任编辑　袁伟刚)

我是个拙笨的学艺者，没有充分的天才，全凭苦学.

——梅兰芳