例 谈 空 间 距 离

——点到平面的距离求法

邢 峰

(会宁县第四中学,甘肃 会宁 730700)

空间距离是指两点间距离、点线距离、点面距离、线线距离、线面距离及面面距离。一般情况下,这些空间距离都要转化为同一平面内的两点间距离,即线段长来计算。因此在实际题型中,这六种距离的重点和难点都是如何转化到点到平面的距离。线面距离和面面距离均可转化为点到平面的距离,下面就点到平面的距离求法作出归纳总结。

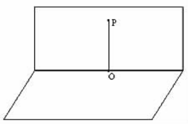

图1

求距离的思想方法和步骤与求角的问题是相似的,其基本步骤是:①找出或作出有关距离的图形;②证明它符合定义;③在同一平面内计算。

点到平面的距离求法有下列三种思路方法:

【思路方法一】直接法:求解的关键是正确作出图形,确定垂足位置最重要。要充分利用面面垂直的性质。(如图1)

【思路方法二】等体积法:把所求距离转化为求锥体的高。

【思路方法三】向量公式法:$d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$,其中$\vec{n}$为平面的法向量,A为平面内任意一点。

简证:如图2,$PO\perp\alpha$,$\angle APO=\theta$,则$PO=d=|\overrightarrow{PA}|\cdot\cos\theta$,

而$\cos\theta=\pm\cos(\overrightarrow{PA},\vec{n})$,即$\cos\theta=|\cos(\overrightarrow{PA},\vec{n})|$,

于是$d=PO=|\overrightarrow{PA}|\cdot\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PA}||\vec{n}|}=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$。

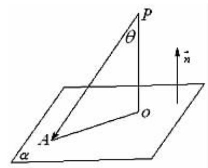

图2

下面通过几个实例来说明点到平面的距离求法,以及线面距离或面面距离转化为点到平面的距离求法。

例1:在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AB=4$,$BC=3$,$CC_1=2$,(如图3所示)求点B_1到平面A_1BC_1的距离。

(ⅱ)当$0<a<2$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,1)$,$(1,+\infty)$为增函数。

(ⅲ)当$a>2$时,$0<\frac{a-2}{a}<1$,令$f'(x)=0$,解得$x_1=-\sqrt{\frac{a-2}{a}}$,$x_2=\sqrt{\frac{a-2}{a}}$。

当x变化时,$f'(x)$和$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	单调递增	单调递减	单调递增	单调递增

$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}})$,$(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1)$,$(1,+\infty)$为增函数,$f(x)$在$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}})$为减函数。

(Ⅱ)(ⅰ)当$0<a\leqslant 2$时,由(Ⅰ)知:对任意$x\in(0,1)$,恒有$f(x)>f(0)=1$。

(ⅱ)当$a>2$时,取$x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}}\in(0,1)$,则由(Ⅰ)知$f(x_0)<f(0)=1$

(ⅲ)当$a\leqslant 0$时,对任意$x\in(0,1)$,恒有$\frac{1+x}{1-x}>1$且$e^{-ax}\geqslant 1$,得$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}\geqslant\frac{1+x}{1-x}>1$。

综上当且仅当$a\in(-\infty,2]$时,对任意$x\in(0,1)$,恒有$f(x)>1$。

点评:此题为2006年全国卷第21题,难度较大,背景公平,设问恰当,适应了不同的考生,较好地考查了考生的思维水平及逻辑推理论证的能力,区分度较好。

三、利用导数求解与函数的极值、最值有关的问题

利用导数求函数的极值与最值需强调:(1)对于可导函数来说,极值点处导数值为0。反之,解$f'(x)=0$得到$f(x)$的极值可能点,结合函数$f(x)$的增减性确定函数$f(x)$的极值点。(2)由函数极值与区间端点的函数值,确定函数在闭区间上的最值。(3)在解决实际问题时,如果函数在定义域上仅有一个极值点,那么这个极值就是最值。

例3:已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,且过曲线$y=f(x)$上的点$P(1,f(1))$的切线方程为$y=3x+1$,若$y=f(x)$在$x=-2$时有极值。

(1)求$f(x)$的表达式;(2)求$y=f(x)$在$[-3,1]$上的最大值。

解析:(1)$f'(x)=3x^2+2ax+b$,由题意知$P(1,4)$在$f(x)$上,$\therefore 1+a+b+c=4$,且$\begin{cases}f'(1)=3\\f'(-2)=0\end{cases}$,可解得$a=2$,$b=-4$,$c=5$。$\therefore f(x)=x^3+2x^2-4x+5$。

(2)由$f'(x)=3x^2+4x-4=0$得$x=\frac{2}{3}$或$x=-2$。

x变化时$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	−3	(−3,−2)	−2	$(-2,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},1)$	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	8	单调递增	13	单调递减	$\frac{95}{27}$	单调递增	4

函数的最大值为13。

点评:此题是解与可导函数有关的极值与最值问题,题目简单思路清楚。

为了支持新课程的改革,导数的地位在不断加强,对导数考查的广度和深度也不断加重。导数是研究函数的重要工具,特别是借助导数,对于可导函数的单调性进行研究,为求函数的极值与最值提供了一种简单快捷的方法。因此在组织教学时,教师要充分利用教材,穿插与渗透运用导数解决函数问题的训练,把它作为研究函数性质的基本方法加以总结和利用,促进知识和方法的系统化。

参考文献:

[1]邓军.导数教学中的几个关键点.中学数学,2008,(6).

[2]安振平.用导数知识探究数学问题.中学数学教学参考,2007,(12).

[3]李忠义.导数的概念及应用.试题与研究,2007,(11).

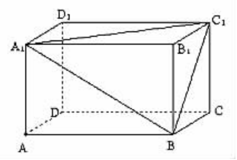

图3

解：[方法一]等体积法。

设点B_1到平面A_1BC_1的距离为h，

易得$A_1C_1=5$，$A_1B=2\sqrt{5}$，$BC_1=\sqrt{13}$，

$\therefore \cos\angle A_1BC_1=\frac{2}{\sqrt{65}}$，

$\therefore \sin\angle A_1BC_1=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$，

$\therefore S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{1}{2}A_1B\cdot BC_1\cdot \sin\angle A_1BC_1=\sqrt{61}$。

由$V_{B_1-A_1BC_1}=V_{B-A_1B_1C_1}$得：$\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC_1}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot A_1B_1\cdot B_1C_1)\cdot BB_1$，

代入数值解得$h=\frac{12\sqrt{61}}{61}$。

[方法二]若此题为选择或填空题，可直接用“直角四面体”的结论：$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$求解。

此题中：$a=4$，$b=3$，$c=2$，则计算得：$h=\frac{12\sqrt{61}}{61}$。

[方法三]向量法。

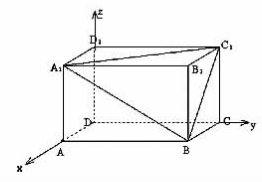

图4

如图4所示，建立空间直角坐标系$D-xyz$，则$A_1(3,0,2)$，$B(3,4,0)$，$B_1(3,4,2)$，$C_1(0,4,2)$，

$\therefore \overrightarrow{B_1B}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,4,0)$。

设平面A_1BC_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\end{cases}$得$\begin{cases}z=2y\\ 3x=4y\end{cases}$。

令$y=3$，解得$\vec{n}=(4,3,6)$，

则点B_1到平面A_1BC_1的距离$d=\frac{|\overrightarrow{B_1B}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{12\sqrt{61}}{61}$。

例2：如图5，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面是等腰三角形，$\angle ACB=90°$。侧棱$AA_1=2$，D，E分别是CC_1与A_1B的中点，点E在平面ABD上的射影是$\triangle ABD$的重心G，求点A_1到平面AED的距离。

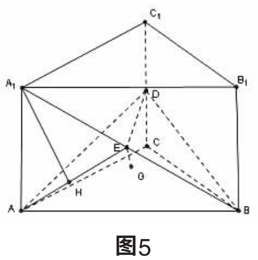

图5

解：[方法一]直接法。

$\because D$，E均为中点，

$\therefore DE\perp AA_1$，$DE\perp AB$，

$\therefore DE\perp$平面AA_1E，又$DE\subset$平面AED，

$\therefore$平面$AED\perp$平面AA_1E，且交线为AE，

$\therefore$点A_1在平面AED上的射影H在AE上。

于是$A_1H\perp$平面AED，即A_1H的长为所求。

说明：此方法找距离容易，但在计算A_1H时会受阻，因此这一方法并不是很好。

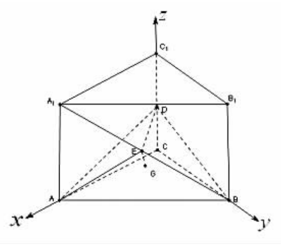

图6

[方法二]向量法(公式法)。

如图6所示，建立空间直角坐标系$C-xyz$。

设$CA=a$，则得$C(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$C_1(0,0,2)$，$A_1(a,0,2)$，$E(\frac{a}{2},\frac{a}{2},1)$，$D(0,0,1)$，$G(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{1}{3})$，

于是$\overrightarrow{GE}=(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{2}{3})$，$\overrightarrow{BD}=(0,-a,1)$。

依题意$\overrightarrow{GE}\perp\overrightarrow{BD}$，

$\therefore \overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

即$-\frac{a^2}{6}+\frac{2}{3}=0$，解得$a=2$。

$\therefore \overrightarrow{AD}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,1,-1)$。

设平面AED的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\vec{n}\perp\overrightarrow{AD}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}$得$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=-y\\ 2x=z\end{cases}$。

令$x=1$，得$\vec{n}=(1,-1,2)$，

于是$d=\frac{|\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

例3：正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，M，N，E，F分别是A_1D_1，A_1B_1，D_1C_1，B_1C_1的中点。(如图7)

(1)求证：平面AMN∥平面$EFBD$。

(2)求平面AMN与平面$EFBD$间的距离。

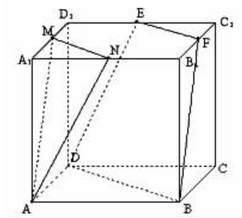

图7

(1)证明：略。

(2)解：[方法一]直接法。

可以找到所求的距离，最后转化为点到平面的距离，但比较麻烦。

[方法二]等体积法。

$\because$平面AMN∥平面$EFBD$，

$\therefore$可转化为点B到平面AMN的距离，设此距离为d。

由$V_{B-AMN}=V_{M-ABN}$得$\frac{1}{3}S_{\triangle AMN}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABN}\cdot A_1M$，

又$S_{\triangle AMN}=6$，$S_{\triangle ABN}=8$，$A_1M=2$，

代入解得$d=\frac{8}{3}$。

[方法三]向量法(公式法)。

同方法二，转化为求点B到平面AMN的距离d。

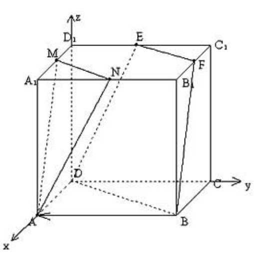

图8

如图8所示，建立空间直角坐标系$D-xyz$，

于是得到$A(4,0,0)$，$M(2,0,4)$，$N(4,2,4)$，$B(4,4,0)$，

因此$\overrightarrow{BA}=(0,-4,0)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{AN}=(0,2,4)$。

设平面AMN的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=2z\\ y=-2z\end{cases}$，

令$z=1$，得到$\vec{n}=(2,-2,1)$，

则所求两平面的距离$d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{8}{3}$。