让学生学会“选择” 使课堂绽放“精彩”

——高三一轮复习课“解三角形”的教学与感悟

刘国祥 （江苏省宜兴中学 214200）

1 背景描述

由江苏省中小学教学研究室主办、宿迁市中小学教学研究室和江苏省宿迁中学承办的江苏省第十三届中学数学教学高级论坛，于 2017 年 10 月 18～20 日在江苏省宿迁中学举行，主题为“转变教学方式，提升关键能力”，活动形式是课堂展示、专家报告、专题发言以及经验介绍.全省近 200 名中学数学教育教学专家和代表齐聚一堂，共论数学教育教学的艺术、畅想数学教育教学的未来.

在本次论坛中，笔者应邀开设了一节关于高三数学一轮复习的展示课，课题是“解三角形”.授课学生来自宿迁中学创新实验班，他们基础扎实，思维敏捷，数学学习的积极性高，有较强的合作精神和探究能力.本课是“解三角形” 复习的第一课时，教学的定位是“厘清知识框架，突出方法重选择，渗透思想提能力”.新颖的过程设计、丰富的学生活动，催生了精彩的数学课堂，取得了良好的教学效果，受到了听课专家与教师们的肯定与好评.

2 过程展示

2.1 师生对话，引入课题

师：三角形中有哪些元素？

生众：三条边，三个角.

师：6 个元素中至少需要几个条件，就能确定三角形？

生众：至少需要三个条件.

师：什么是解三角形？

生众：解三角形就是已知三个条件求其余边角.

师：解三角形有哪些工具？

生众：正弦定理、余弦定理.

师：你还记得正弦定理和余弦定理的内容吗？

（学生回忆两个定理的内容，教师板书.）

师：解三角形是高中数学研究的一个重要内容，它有着丰富的内涵和价值，是高考必考的知识点.如何才能准确、灵活地运用正弦定理和余弦定理求解有关“解三角形” 的问题呢？下面，我们做一些探讨.

2.2 梳理知识，建构方法

例 1 （必修 5 第 17 页）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，求证：$c=a\cos B+b\cos A$.

生 1：转化为证明 $\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A$.

师：化边为角，实际上用了正弦定理变形：在 $\triangle ABC$ 中，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

生 2：右式 $=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$.

师：化角为边，实际上用了余弦定理变形.三角恒等变形两条途径：化边为角、化角为边.

生 3：在 $\triangle ABC$ 中，过点 C 作 $CD\perp AB$（图 1），$AB=AD+DB=b\cos A+a\cos B$.

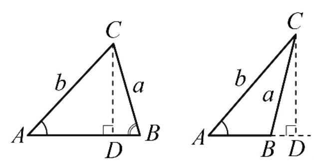

图 1

师：化斜三角形为直三角形.

生 4：$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$，则问题可解决.

师：请同学们谈谈“解题之道”.

学生适当交流，形成以下共识：化角为边、化边为角、化斜为直、向量法.

师：同学们在解题过程中可谓左右逢源，体现了方法选择的价值.

2.3 尝试运用，学会选择

· 片段 1 知识联想 —— 公式的合理选择

例 2 （必修 5 第 24 页）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 S，$\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)=4S$，则角 $C=$______.

师：依据恒等式左边结构特征，选择什么公式？

生众：余弦定理，变换为 $2ab\cos C$.

师：面积公式有哪些表述？依据结构合理选择什么公式？

生众：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah$（$h$ 为边 a 上的高），本题选择 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，得出 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

师：审视等式结构特征，合理选择公式，是理性

解题的关键.

· 片段 2　思路调控——方向的准确选择

师:三角形中有三条边和三个角,结合正弦定理和余弦定理分析已知哪些边和角就可以求其余的边角?

生:已知三边、两边及夹角、两边及一边对角、两角及一边可以求其他三个边角.

师:在确定的三角形中解三角形就是“知三求三”.

例 3　(必修 5 第 17 页)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $A=\frac{\pi}{4}$, $a=\sqrt{3}$, $\sin B=\frac{3}{5}$,求边 c 的长.

师:是上述解三角形中哪一类?

生众:已知两角及一边,求边 c.

师:要求边 c 有哪些路径?

生 1:先求 $\sin C$,再用正弦定理求边 c.

师:怎样来判定 $\cos B$ 的符号?

生 2:用正弦定理求出 $b=\frac{3\sqrt{6}}{5}$,由 $a>b$,得出 B 是锐角.

生 3:因为在 $\triangle ABC$ 中 $\sin A>\sin B$,所以 $A>B$.

师:生 1 和生 2 用到了常见结论:在三角形中 $A>B \Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

生 4:先利用正弦定理求出 b,然后再利用余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得出方程 $25c^2-30\sqrt{3}c-21=0$,得出 $c=\frac{7\sqrt{3}}{5}$, $c=-\frac{\sqrt{3}}{5}$(舍).

生 5:过 C 作 $CD\perp AB$(图 2),垂足为 D,在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中,求出 $BD=\frac{4\sqrt{3}}{5}$, $CD=\frac{3\sqrt{3}}{5}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,求出 $AD=\frac{3\sqrt{3}}{5}$,得 $c=\frac{7\sqrt{3}}{5}$.

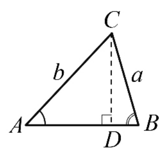

图 2

师:精彩!化斜三角形为直角三角形.请你对这三条路径谈谈自己的看法.

生 6:生 1 是化到角,难点是角 B 的判定;生 4 是化到边,难点是解方程;生 5 是用几何方法来解,较难想到.

师:归纳得很好!这三种方法也是解三角形常见方法.实际上,生 1 和生 5 是从代数和几何角度实施等价转化,生 4 是构造方程,隐含了方程思想.

例 4　(2017 年江苏高考应用题改编)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c,且 $a=14$, $b=40$, $\cos B=-\frac{3}{5}$,求 BC 边上的高(图 3).

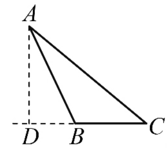

图 3

师:要求 BC 边上高 AD,有哪些路径?

生 1:在 $\triangle ABC$ 中先用余弦定理求 AB,再在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中求高 AD.

生 2:在 $\triangle ABC$ 中求 $\sin C$,再在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中求高 AD.

师:请你判断哪条思路运算更有效?

生 3:生 2 运算更有效,该问题中角 B 明确是钝角,无需判断;而生 1 运算难点是解方程,解方程的运算量可能偏大.

师:在解题的十字路口我们要学会选择.事实上,若按照生 1 的思路,得到方程应该是 $5x^2+84x-7\,020=0$,在 2017 年高考中许多同学就因为此方程不会解而中途放弃.如果遇到这种情况,我们要能换一个角度,转到生 2 的思路上去,实现化难为易.

师:我们把上面的问题归纳起来,就得到解三角形的内容、方法、思想的思维导图(图略).

· 片段 3　思维引领——方法的灵活选择

例 5　(必修 5 第 16 页例 2 改编)在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, $\angle BAD=\frac{\pi}{4}$, $\angle CAD=\frac{\pi}{6}$, $AB=\sqrt{2}$,求中线 AD 的长度.

师:请同学们自行设计思维导图.

生 1:思维导图:先求 AC,再求 AD.

师:求边 AC 有哪些路径?

生 2:在 $\triangle ABD$ 中, $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$;在 $\triangle ACD$ 中, $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle DAC}$,得到方程.

生 3:依据 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$,得到 $\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle CAD$.

师:通过两次使用正弦定理和等积法来构造方程得到 $AC=2$,生 3 更简捷.

师:求 AD 有哪些路径?

生 4:在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中利用余弦定理,得到 AD.

生 5:利用向量的中线表达式 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,然后利用向量平方运算.

生 6:在 $\triangle ABD$ 中过 B 作 AD 的垂线 BM(图 4),容易求得 $BM=1$, $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,利用等积法

求 AD.

师:同学们从不同角度来求 AD,用到了“算两次”、向量法、等积法.请同学们观察一下图形,能否从另一边作垂线?

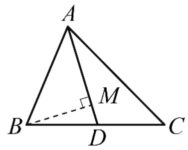

图 4

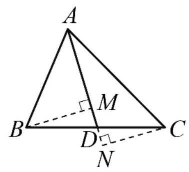

图 5

生 7:在 $\triangle ABD$ 中过 C 作 $CN \perp AD$(图 5),在 $\mathrm{Rt}\triangle ACN$ 中,求得 $AN=\sqrt{3}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中求得 $AM=1$,$DM=DN=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,可得 $AD=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

生 8:取 AC 的中点为 E,连结 DE(图 6).在 $\triangle ADE$ 中,有 $DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\angle DAE=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle ADE=\dfrac{\pi}{4}$,在 $\triangle ADE$ 中可以求解.

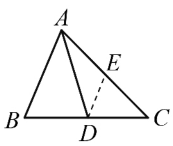

图 6

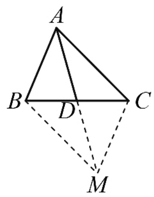

图 7

生 9:延长 AD 到 M,使 $AD=DM$,构成平行四边形 $ABCM$(图 7),在三角形 ABM 中可求解.

师:生 7 实际上用了“化斜为直”的方法,生 8、生 9 通过作辅助线把条件汇聚到同一个三角形中,转化成基本问题.

2.4 总结反思,完善认知

师:请同学们讨论本次学习的收获.

学生自我总结,分组交流,教师适当补充.

生:本节课复习了解三角形的有关内容.解决解三角形问题的常用方法有:化边为角、化角为边、化斜为直、向量法等,根据题目的条件灵活地选择方法是我们要着力解决的问题,其核心思想是化归与转化.

师(结束语):本节课我们以师生合作交流的方式共同探究了解三角形的有关问题,通过本节课的学习,同学们充分地体会到解决数学问题,知识是基础,思想是灵魂,方法是核心,要善于用数学思想方法作指导,根据问题的条件,灵活地、恰当地选择方法来解决问题.在数学学习中,如果我们都能不断地反思总结,努力改善教与学的方式,就能有效地提高学习效果,实现我们的梦想和追求.

3 教学感悟

(1) 以教材习题为主要载体,在知识的梳理中完善认知结构

在高三一轮复习中应以课本为基础,以课本核心概念、典型例习题、定理推导等为蓝本进行变式、重组,并将资料融入课本,从知识、方法、思想三个维度构建完备体系,使之系统化、结构化、网络化.高三一轮复习课的知识梳理,通常的做法是先梳理知识、概念,然后应用知识解决问题.而本课采用的方法是从课本基本问题解决过程中梳理知识、提炼方法、渗透思想,实现知识结构的完善和方法体系的建构.

本课所选题目来自课本,例 1 是证明射影定理,其证明方法涵盖本节课要讲的四种基本方法:化边为角、化角为边、化斜为直、向量法,从而构建方法体系.其中,“化斜为直” 方法源于正弦定理推导,是解决三角问题的重要策略,在例 3、例 4 中有充分的体现.例 1 同时涉及正弦定理和余弦定理的逆用,例 2 突出公式的选择,从例 1 和例 2 分析中完成知识梳理.例 3、例 4 重点是题型梳理,让学生明白“解三角形问题无非就是立足三个边角条件,借助公式化简,利用方程思想解出另外三个变量”.在解答过程中完成方程和等价转化思想的梳理.

(2) 以问题解决为主要策略,在方法的选择上提升能力素养

三角恒等式的变形要善于“察题观式”,依据结构特征灵活选择公式,避免化简走弯路.如 2017 年无锡期末考试题:在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $\sin A+\cos^2\dfrac{B+C}{2}=1$,求 $\sin A$.学生变形得到 $\sin A+\sin^2\dfrac{A}{2}=1$ 后,大部分学生选择降次公式而导致因过程繁琐最终半途而废,归根结底是学生形成了看到平方就降次的思维定势.其实,观察式子特点可以变形为 $\sin A=\cos^2\dfrac{A}{2}$,从而思路更加自然.

在解题的十字路口让学生停下脚步对解题的方向作判断有利于优化运算.例 4 假如采用方程的思路就会因方程难解而放弃,很多学生用了该法但不会回头,问题就出在方向的选择上.因此,在遇到一题多解时要引导学生对方法特点作出恰如其分的评判.例 5 是课本例题的变式题,是以已知三边求中线的长度为基点,给学生搭建开放性思维平台,学生的积极性被充分调动起来,他们相互启发,思维活跃,共计有十种不同解法,归纳起来就是三条思路:一是通过几何方法化归到同一个三角形;二是将斜三角

整体把握教材　提升核心素养
——以“椭圆的几何性质”的教学为例

金　鹏　（江苏省苏州高新区第一中学　215011）

前不久，笔者有幸参加了 2017 年江苏省高中青年数学教师优秀课观摩与评比活动，并执教了“椭圆的几何性质”这一课题.在此过程中，围绕如何上好这一节课多次与一些专家、教师进行了深入的探讨.现将研讨中的一些观点和本节课教学设计的想法整理成文，供各位同仁思考.

1　教学分析

1.1　教材分析

椭圆是非常重要的几何模型，具有优美的几何性质.在日常生活、社会生产及其他学科中都有广泛的应用.本课是在学生学习了椭圆的定义、标准方程的基础上，第一次较为系统地学习在解析几何中如何用代数方法研究曲线性质，也包括研究哪些方面的性质、利用何种方法手段进行研究，既有形的直观，更有数的严谨，这对后续的双曲线、抛物线，乃至一般曲线的研究，起到重要的“示范”与“标杆”作用.

1.2　学情分析

知识基础　在本节课以前，学生已经学习了椭圆的定义、标准方程，也经历了根据椭圆定义画椭圆的操作实验，对椭圆定义有直观的认识，对椭圆的对称性、封闭性有感性的认识.这些既是本节课的起点，同时也是本节课的生长点.

学习现状　虽然此前已学习了“解析几何初步”，但是直线与圆在初中平面几何中已充分研究，学生习惯于从形上入手，当下要研究的椭圆已难以完全用“平面几何”的方法了，那么该怎样把学生引导到用代数方法解决几何问题呢？特别是高二学生，更需要培养他们的逻辑推理能力和理性思维习惯.

解决方法　引导学生从特殊到一般，通过类比、联想，不断探究、概括、抽象出几何性质.

形化成直角三角形；三是利用方程思想，可以利用正弦定理、余弦定理、等积法、向量来列方程.

（3）以变式探究为主要手段，在思想的渗透中培养理性思维

高三一轮复习的首要任务是把学生先前学的知识连成线、铺成面、组成网，从而实现知识的融会贯通，不论题目如何千变万化，总能做到游刃有余.这需要教师从数学思想方法的高度设计教学程序，强调知识结构的整体把握，克服“见木不见林”的弊端.要实现这个预期，就应该用简单问题反映基本知识、方法、思想，构建完备知识网络，在陌生的问题情境中挖掘隐含信息，运用和选择方法解题，以提升学生的思维能力.本节课从课本的典型问题出发，构建完备的知识、题型和方法体系，在知识运用中突出方法的选择，培养学生的理性思维，使学生实现由“学会”向“会学”的转化.

数学思想方法是数学的精髓，对指导数学解题有着不可低估的作用，其培养不是在课堂总结时强调一下就能实现的，而是要渗透在解决问题的整个过程中.对解题思路的分析、对解题方法的探寻，要能充分体现数学思想方法的引领作用，体现数学思想方法的指导价值.对于解三角形问题，其基本思想方法是“统一”，其思路是利用正弦定理和余弦定理，将已知条件和待求结论统一到边的关系上或统一到角的关系上，再利用有关公式来解决，或者通过作辅助线，构造直角三角形，实现问题的“转化”.在教学中，借助问题及其变式，引领学生在探究问题解决的过程中，深入体会这一思想方法的运用，帮助学生养成良好的解题习惯和学习习惯，从而有效地提高学生分析问题和解决问题的能力，提升学生的数学素养.

提高高三数学复习的有效性是一个需要不断探索、研究和完善的课题，其中例题和活动的设计是一个十分重要的环节.教师要围绕一节课复习内容的重点和难点，结合教材内容精心设计教学例题，以例题为载体展开教学活动，梳理知识结构，建立知识网络，复习基本技能，指导方法选择，体会知识的发生、发展过程，在结构上逐步深入、层层递进，体现数学思想方法，提高数学思维水平，使学生脱离题海、学会学习，使课堂精彩灵动、本真高效.