# 数学核心素养引领下的单元教学设计
## ——以“高三二轮复习解三角形”为例

于莺彬　　刘海龙
(山东省青岛第六十六中学，266031)(山东省青岛市招生考试院，266071)

**摘　要**：单元教学设计不是单纯的知识点传输与技能训练的安排，而是教师基于学科素养，思考怎样描绘基于一定目标与主题而展开探究活动叙事的活动，目的是为了创造优质的教学.本文通过高三二轮复习解三角形这一节的单元教学设计，重点说明如何通过结构不良问题进行合理的问题设置，从而提升学生的思维能力，发展学生的数学核心素养.

**关键词**：单元教学设计；学科核心素养；结构不良问题；开放题

### 一、研究背景

《普通高中数学课程标准》是新课程改革贯彻和实施的核心依据，也是我们进行教学研究的主要依据.数学课程标准明确指出：数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同体验、不同兴趣学生的差异化学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为未来发展和进一步学习打好基础.[1]

单元教学设计不是单纯的知识点传输与技能训练的安排，而是教师基于学科素养，思考怎样描绘基于一定目标与主题而展开探究活动叙事的活动，目的是为了创造优质的教学.[2] 单元教学设计就是从一章或者一单元的整体出发，根据章节或单元的总体目标要求，以不同知识点为载体，以核心数学思想、方法为主线，综合利用各种教学形式和教学策略，使学生形成对一个相对完整的认知结构的一种规划.这样有利于整体把握本单元的教学内容、教学目标，突出本单元的重点内容、核心思想与研究方法.[3]

### 二、高三二轮复习“解三角形”单元教学设计

**1.教材分析**

解三角形是通过给出的边角关系确定剩余边角元素的过程，在解题过程中需要将边角间的关系数量化，从而构建起一系列的方程(组)，因此方程思想是解三角形的关键思想，如何构建可解的方程组是学生学习过程中面临的核心问题.如果已知的方程个数比未知的边角元素个数少，这样就变成了不确定的三角形.如果三角形不确定，那么我们常常研究最值范围问题，其中函数、不等式等知识就发挥重要的作用了.另一方面，三角形是一个几何图形，有时从平面几何的角度考虑也是一个重要途径，数形结合的思想就显得非常重要.除此之外，高中阶段，平面向量作为研究平面几何的重要工具，坐标法作为解析几何的基本方法，有时也为解三角形问题另辟蹊径.同时，解三角形从实际问题中构建数学模型，将实际测量、航海等问题转化为可解的三角形问题，逐渐提高学生运用数学知识分析和解决实际问题的能力.所以，解三角形这一章蕴含了丰富的数学思想和数学思维，在高三复习教学中，教师可通过单元教学设计的方式来帮助学生建构完整的知识体系，完善认知结构，优化解题方法，提高复习效率.

**2.学情分析**

经过了一轮复习，学生们的知识容量已经具备，知识框架也差不多形成.

**3.单元教学目标**

知识与技能：(1)熟练掌握开放题的解题模式，做到游刃有余；(2)进一步理解正弦定理、余弦定理、面积公式，探求三角形中边与角的值；(3)能够熟练运用正弦定理、余弦定理和三角函数等知识和方法判断三角形的形状.

过程与方法：培养学生提出问题、正确分析问题、解决问题的能力，培养学生合情推理探索数学规

律的数学思维能力.

情感态度价值观:激发学生学习数学的兴趣,在教学过程中激发学生的探索精神,在解决问题的过程中体会蕴含其中的数学内在联系和数学方法,感受数学之美.

核心素养目标:学生在问题探究中发展逻辑推理、数学运算、数学抽象的核心素养.

**4. 教学重难点**

知识网络的构建,思想方法的提升.

**5. 教学策略**

本节内容是高三二轮解三角形复习课,采用结构不良的开放题模型,以单元教学设计的形式,对教学内容进行优化重组,突出数学内容的主线以及知识间的关联性,把解三角形中的正弦定理、余弦定理、面积公式连同关系密切的三角函数、三角恒等变换等知识有机地结合起来,使知识脉络更加清晰.在单元教学设计中,笔者不再过分关注具体知识点,更加注重教学内容的本质、蕴含的数学思想以及学生数学核心素养的培养.具体的学习方式为:以问题为核心,让学生提出问题,或独立解决问题,或小组合作解决问题,引导学生自主探究、小组合作、讨论对话、相互交流,最终实现学习目标.让教师由知识的传授者、灌输者转变为学生发现问题、解决问题的帮助者、促进者,课堂教学的组织者、指导者.

**6. 教学过程**

教师:同学们,开放题是今年高考的热点题型,它大致可以分为条件开放、结论开放、条件和结论都开放三种,今天我们来研究一道条件和结论都开放的题.

**例** 已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边为 $a,b,c$,若___①___,$b=\sqrt{13}$,则___②___.

教师:请同学们在①处和②处分别添加条件和结论,组成一道完整的题,并给出解答.每完成一道题,如果你能告诉大家想考查哪些知识点就更好了.请同学先独立思考,然后小组交流.

设计意图:条件和结论都空缺,为学生留白更多,想象的空间越多,发挥的余地越大.

预设题目1:①处填“$a=4,c=6$”,②处填“判断 $\triangle ABC$ 的形状”.

设计意图:借助于余弦定理,判断最大角的余弦值的正负,考察了余弦定理.若②处填:解三角形或求 $\triangle ABC$ 的面积,又考察了正弦定理和面积公式,这样,解三角形的知识完整起来.由特殊到一般的数学思想.

(教师在黑板上板书三角函数知识框图)

预设题目2:①处填“$a\cos B=b\sin A$”或者“$a\cos A=b\cos B$”,②处填“求 $a$”或者“判断 $\triangle ABC$ 的形状”.

追问:$\sin 2A=\sin 2B$ 和 $\sin A=\sin B$ 得到的结论有何不同?

预设题目3:①处填“$B=\frac{\pi}{3}$”,②处填“求 $\triangle ABC$ 面积的最大值”.

设计意图:余弦定理和重要不等式的完美结合.知识间的联系.

追问:②处改为“求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围”.

设计意图:(解法1)余弦定理和基本不等式的组合,最后不要忘了 $a+c>b$;(解法2)正弦定理和化一公式的组合,要注意 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$.余弦定理与基本不等式携手,正弦定理与化一公式结合.

预设题目4:①处填“$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$”或者“$\cos B=\frac{1}{2}$”或者“$\tan B=\sqrt{3}$”或者“角 $B$ 终边上一点的坐标 $P(1,\sqrt{3})$”,②处填“求 $\triangle ABC$ 面积的最大值”或“求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围”.

设计意图:保留前面这个高大上的结论,把已知条件改成能求出 $B=\frac{\pi}{3}$ 的条件,本题又考察了同角三角函数的基本关系或者三角函数的定义.

(教师在黑板上默默地补充框图)

追问:若已知选 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,需要注意什么问题呢?

设计意图:提醒学生注意两解,思维的周密性.

预设题目5:①处给出一个三角函数解析式,比如 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,$f(B)=2$,②处填“求 $\triangle ABC$ 面积的最大值”或“求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围”.

设计意图:有了解析式,就可以引出三角函数的图象与性质.考查函数与方程的思想.

预设题目6:①处填“$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$($\omega\in[1,4]$,$\omega\in\mathbf{N}^*$),$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 对称

(或者 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{18},0)$ 对称), $f(B)=2$",②处填:"求 $\triangle ABC$ 面积的最大值"或"求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围".

设计意图:很好地考察了正弦函数的对称轴、对称中心等性质和整体的思想.

(教师在黑板上补充框图)

预设题目7:①处填"$f(x)=\cos^2x-\sin x\cos x$, $f(B)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$",②处填"求 $\triangle ABC$ 面积的最大值"或"求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围".

设计意图:很好地引出和差角公式、二倍角公式、化一公式.

教师:同学们也可以出高考题了,水平还不低呢.下面让我为大家展示一道高考模拟题,看看出题人是怎么想的.请同学们在练习本上完成.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边为 $a,b,c$, ________, 若 $b=\sqrt{13}$, ________. 请从下面三个条件中任选一个,两个结论中任选一个,组成一个完整的问题,并给出解答.

条件:① $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$;② $a$;③ $a^2+c^2-b^2=ab\cos A+a^2\cos B$.

结论:①求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围;②求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

(教师用实物投影展示几位同学的做法.)

教师:有了前面的铺垫,同学们解题速度提高很快呢.

预设题目8:①处填"$A,B,C$ 成等差数列",②处填"求 $\triangle ABC$ 面积的最大值".

预设题目9:①处填"$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1, S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$",②处填"求 $\triangle ABC$ 面积的最大值".

设计意图:开阔思路,三角函数和数列、向量、不等式、解析几何等知识都可以很好地结合.

教师:这也是今天的作业,请同学们每人设计几道三角与其他知识的综合题,并作解答.

**【课堂小结】**

归纳总结,梳理提升.

思想方法:整体的思想,函数与方程的思想,特殊到一般.

**【课后演练】**

**练习1**　在如下三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,若问题中的正实数 $a$ 存在,求出 $a$ 的值;若 $a$ 不存在,说明理由.

① $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 对称;

② $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{18},0)$ 对称;

③ $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增.

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+a(\omega\in\mathbf{N}^*)$ 的最小正周期不小于 $\frac{\pi}{3}$,且________,是否存在正实数 $a$ 使得函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{12}]$ 上有最大值3?

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

**练习2**　在如下三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,作为问题的条件,再解答这个问题.

① $(2a+b)\sin A+(a+2b)\sin B=2c\sin C$;

② $a=\sqrt{3}c\sin A-a\cos C$;

③ $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$.

$\triangle ABC$ 中,角 $A,B,C$ 的对边分别是 $a,b,c$,若 $c=\sqrt{3}$ 且________,探究 $\triangle ABC$ 的周长 $l$ 是否存在最大值?若存在,求出 $l$ 的最大值;若不存在,说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

**7.教学评价**

本课例创造性地应用高考热点问题,项目问题由高考热点只开放条件,变为条件结论都开放,通过一个项目问题,极大地调动了学生的学习积极性和探究热情,通过带领学生思考、小组讨论,交流展示,系统深入复习了三角函数、解三角形及相关知识,真正体现了单元教学的魅力,真正提高了学生的数学思维能力.在开放式的探究中,学生的学习投入增加,学生思维容量和深度增加,对培养学生良好的学习态度、习惯和方法,培养学生思考、讨论、小组交流展示、数学探究、培养核心素养等有重要的作用.

**三、总结与反思**

数学单元教学设计是在整体思维指导下,从提升学生数学核心素养的角度出发,通过教学团队的合作,对相关教材内容进行统筹重组和优化,并将优

(下转36页)

**例1** 已知函数$f(x)=\log_2\frac{2x}{4-x}$,若$f(a+x)+f(a-x)=2b$对于满足$|x|\in(-a,4-a)$的任意$x$恒成立,则$a+b=$________.

**简解** 由前面的讨论探究,根据$f(x)$的定义域为$(0,4)$直接得到$a=2$,于是$b=f(2)=1$,从而$a+b=3$.

**例2** (多选题)关于函数$f(x)=\frac{1}{4^x+2}$的性质,以下说法正确的有(  )

(A) 函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$.

(B) 函数$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$.

(C) 方程$f(x)=x$有且只有一个实根.

(D) 函数$f(x)$的图象是中心对称图形.

**简解** $f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上单调递减,$f(x)\in(0,\frac{1}{2})$.再根据$f(x)$是分式指数型函数,有对称中心$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$,结合函数$f(x)$的图象,判断可知答案为(A)(C)(D).

**例3** 已知$f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$,设$S=f(-2019)+f(-2018)+\cdots+f(2019)+f(2020)$,求$S$的值.

**简解** 由上面的结论,可得$f(x)$的对称中心为$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})$,故满足恒等式$f(\frac{1}{2}+x)+f(\frac{1}{2}-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,亦可化为$f(x)+f(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.结合$S$中项的特点,可利用倒序相加法,得$2S=2020\sqrt{2}$,故$S=1010\sqrt{2}$.

**例4** 已知函数$f(x)=\ln\frac{ex}{e-x}$,若$f(\frac{e}{2021})+f(\frac{2e}{2021})+\cdots+f(\frac{2010e}{2021})=1010(a+b)$,求$a^2+b^2$的最小值.

**简解** 由$f(x)$是分式对数型函数,故其有对称中心.又其定义域为$(0,e)$,于是其对称中心为$(\frac{e}{2},1)$,故有恒等式$f(\frac{e}{2}+x)+f(\frac{e}{2}-x)=2$,或者$f(x)+f(e-x)=2$.设$S=f(\frac{e}{2021})+f(\frac{2e}{2021})+\cdots+f(\frac{2010e}{2021})$,利用倒序相加法,可得$2S=4040$,即$S=2020=1010(a+b)$,于是$a+b=2$.最后再由柯西不等式,得$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,即$a^2+b^2\geqslant 2$,故$a^2+b^2$的最小值为2.

前苏联数学教育家奥加涅相在《中学数学教学法》中指出:“必须重视,很多习题潜在着进一步扩展其数学功能、发展功能和教育功能的可能性,……”.在教学中,教师应当积极引导学生将课本习题进行恰当的扩展、引申,让学生可以在探究中把所学的数学知识、技能、思想和方法联系起来,从而进一步感受到数学的活力,最终发展自己的思维与能力,真正做到走出题海,走进研究性学习.正如不少教师所说,“习”以为常,却不寻常;善于挖掘,美不堪言.

(收稿日期:2020—08—19)

(上接第25页)

化后的教学内容视为一个相对独立的教学单元,以突出数学内容的主线以及知识间的关联性,在此基础上对教学单元整体进行循环改进的动态教学设计.[3] 高三二轮复习容量大,应该在单元教学设计中注意内容的广度和深度,建立知识之间的纵横联系.对学生而言,一方面跳出零散的知识点,在“大单元”教学引领下构建数学学科知识体系,有利于其进行深度学习,提升学习能力和思维能力,另一方面在单元教学设计中注重进阶练习,有利于学生完善学科观念,把握学科本质,进而发展学科核心素养.

开放题实际上就是我们通常所说的结构不良问题,国内对于结构不良问题研究的不是太多,就是高中老师也基本是基于高考出现的开放题进行重复性的练习,缺乏在设计和命制结构不良问题等方面的理论与实践相结合的研究.一线教师应该立足于学科必备知识和关键能力、以素养为导向进行习题设计,研究在开放题中应如何创设问题情境,构造问题,才能激发学生的学习热情,开拓学生的思维能力,发展学生的核心素养.

**参考文献:**

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 钟启泉.学会“单元设计”[N].中国教育报,2015-06-12(009).

[3] 吕世虎、杨婷、吴振英.数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J].当代教育与文化,2016(4):41-46.

(收稿日期:2020—07—04)