做题不能追求数量，而要讲究质量，要学会以点带面，多角度理解，只有这样才能跳出题海的怪圈.选择好题，选择成功！为此，我们特推荐以下习题，希望同学们能够融会贯通，学以致用，从多种角度分析思考、积极探索解题规律，摸索出获得最优解法的途径.

解析几何与立体几何第一轮复习测试题

■陕西　王云伟

一、选择题

1. 给出下列条件，甲：直线 a 垂直于平面 α 内的两条直线；乙：直线 a 垂直于直线 b，$b /\!/$ 平面 α；丙：直线 a 上有两点在平面 α 内的射影重合.其中能判断 $a\perp\alpha$ 的条件有（　　）.

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

2. 已知 l、m、n 是直线，α、β 是平面，下列命题中是真命题的是（　　）.

A. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

B. 设 α-l-β 是直二面角，若 $m\perp l$，则 $m\perp\beta$

C. 若 m、n 在 α 内的射影依次是一个点和一条直线，且 $m\perp n$，则 $n\subset\alpha$ 或 $n/\!/\alpha$

D. 设 m、n 是异面直线，若 $m/\!/\alpha$，则 n 与 α 相交

3. 直线 $y=kx+2$ 与以 $A(1,4)$、$B(3,1)$ 为端点的线段不相交，则（　　）.

A. $-\frac{1}{3}<k<2$　B. $\frac{1}{3}<k<2$

C. $k<-\frac{1}{3}$ 或 $k>2$　D. $k<\frac{1}{3}$ 或 $k>2$

4. 圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最小值为（　　）.

A. 6　B. 2　C. 3　D. 4

5. 用平面 α 截半径为 R 的球，如果球心到平面 α 的距离为 $\frac{R}{2}$，那么截得的小圆的面积与球的表面积的比值为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{3}{16}$

6. 已知平面 α 与 β 所成的二面角为 $80°$，P 为 α、β 外一定点，过点 P 的一条直线与 α、β 所成的角都是 $30°$，则这样的直线有且仅有（　　）.

A. 1条　B. 2条　C. 3条　D. 4条

7. 如果椭圆 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到椭圆的右焦点的距离为10，那么，点 P 到椭圆的左准线的距离是（　　）.

A. 10　B. $\frac{24\sqrt{7}}{7}$　C. $2\sqrt{7}$　D. $\frac{32}{5}$

8. 如图1，点 P 在正方形 $ABCD$ 所在的平面外，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD$，则 PA 与 BD 所成角的大小为（　　）.

A. $30°$　B. $45°$　C. $60°$　D. $90°$

9. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，E 为 DC 边的中点，沿 AE 将 $\triangle ADE$ 折起，使二面角 D-AE-B 为 $60°$，则四棱锥 D-$ABCE$ 的体积为（　　）.

A. $\frac{27\sqrt{39}}{13}$　B. $\frac{9\sqrt{39}}{13}$　C. $\frac{27\sqrt{13}}{13}$　D. $\frac{9\sqrt{13}}{13}$

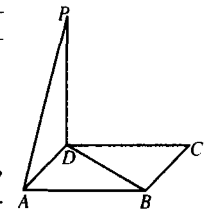

图1

10. 某抛物线形拱桥的跨度是20 m，拱高是4 m，在建桥时，每隔4 m需用一支柱支撑，其中最长的支柱是（　　）m.

A. 4　B. 3.84　C. 1.48　D. 2.92

11. 已知抛物线 $y^2=4x$ 上的点 P 到抛物线的准线的距离为 d_1，到直线 $3x-4y+9=0$ 的距离为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值是（　　）.

A. $\frac{12}{5}$　B. $\frac{6}{5}$　C. 2　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 和圆 $x^2+y^2=\left(\frac{b}{2}+c\right)^2$（其中 $c^2=a^2-b^2$）有四个公共点，则椭圆的离心率 e 的取值范围是（　　）.

A. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{3}{5}\right)$　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{5},\frac{3}{5}\right)$　D. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

二、填空题

13. 已知 $A(-4,0)$、$B(2,0)$，以 AB 为直径的圆 M 与 y 轴的负半轴交于点 C，则圆 M 在点 C 处的切线方程为____.

14. 一个几何体的三视图及其尺寸（单位：cm）如图2所示，则该几何体的侧面积为____ cm^2.

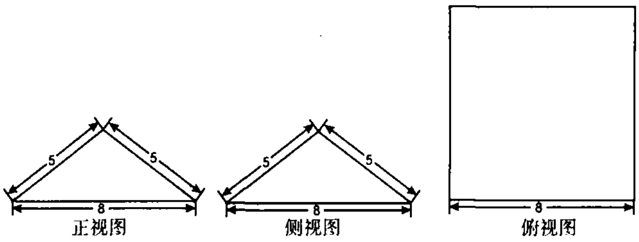

图2

15. 双曲线 C 的中心在原点，虚轴的两端点分别为 B_1、B_2，左顶点和左焦点分别为 A、F，若 $AB_2\perp FB_1$，则双曲线 C 的离心率为____.

16. 在边长为 a 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，E 是 PA 的中点，则点 E 到平面 PBC 的距离为____.

三、解答题

17. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 及该圆内的定点 $P(1,0)$，过点 P 作两条互相垂直的弦 AC 和 BD，设 AC 的倾斜角为 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，四边形 $ABCD$ 的面积为 S，求 S 的最大值及此

中学生数理化高考版

时相应的 α 的值.

18. 正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积为 $72\sqrt{3}$，侧面与底面所成的二面角的大小为 $60°$.

(1)证明：$PA\perp BC$.

(2)求底面中心 O 到侧面的距离.

19. 已知抛物线 $y^2=-x$ 与直线 $y=k(x+1)$ 交于 A、B 两点.

(1)求 $k_{OA}\cdot k_{OB}$ 的值.

(2)当△AOB 的面积等于 $\sqrt{10}$ 时，求 k 的值.

20. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=2$，$AB=4$，$AA_1=2\sqrt{6}$，点 E 是 AB 的中点，过点 D_1、C、E 的平面交 AA_1 于 F.

(1)求证：$EF/\!/CD_1$.

(2)求二面角 $D_1\text{-}CE\text{-}D$ 的大小.

(3)求点 D 到平面 $CEFD_1$ 的距离.

21. 梯形 $ABCD$ 中，$CD/\!/AB$，$AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB=a$，E 是 AB 的中点，将△ADE 沿 DE 折起，使点 A 折到点 P 的位置，且二面角 $P\text{-}DE\text{-}C$ 的大小为 $120°$.

(1)求证：$DE\perp PC$.

(2)求直线 PD 与平面 $BCDE$ 所成角的大小.

(3)求点 D 到平面 PBC 的距离.

22. 已知圆 $C:(x+1)^2+y^2=8$，定点 $A(1,0)$，M 为圆上一动点，点 P 在 AM 上，点 N 在 CM 上，且满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，点 N 的轨迹为曲线 E.

(1)求曲线 E 的方程.

(2)若过定点 $F(0,2)$ 的直线交曲线 E 于不同的两点 G、H（点 G 在点 F、H 之间），且满足 $\overrightarrow{FG}=\lambda\overrightarrow{FH}$，求 λ 的取值范围.

参考答案与提示

1. B　提示：只有条件丙满足题意.

2. C　提示：对于选项 A，若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 m、n 可能相交、平行或异面. 对于选项 B，若 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 是直二面角，$m\perp l$，则 $m\subset\beta$，$m/\!/\beta$ 或 m 与 β 相交. 对于选项 D，若 m、n 异面，$m/\!/\alpha$，则 $n\subset\alpha$、$n/\!/\alpha$ 或 n 与 α 相交.

3. C　提示：直线 $y=kx+2$ 过定点 $P(0,2)$，$k_{PA}=\frac{4-2}{1-0}=2$，$k_{PB}=\frac{1-2}{3-0}=-\frac{1}{3}$. 结合图像，可知答案为 C.

4. D　提示：圆心 $(0,0)$ 到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离为 5，圆的半径为 1，则圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最小值为 $5-1=4$.

5. D　提示：截得的小圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$，则截得的小圆的面积与球的表面积之比为 $\frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{16}$.

6. D　提示：当直线与二面角的棱垂直且与两平面所成的角相等时，直线与两平面所成的角是 $50°$ 或 $40°$，则过点 P 且与平面 α、β 所成的角都是 $30°$ 的直线有且仅有 4 条.

7. B　提示：由椭圆的第一定义，可知点 P 到椭圆的左焦点的距离为 6. 椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$. 由椭圆的第二定义，可知点 P 到椭圆的左准线的距离为 $\frac{6}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{24\sqrt{7}}{7}$.

8. C　提示：以点 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DP}$ 为 x、y、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系. 利用空间向量的夹角公式即可得出答案.

9. B　提示：过 D 作 $DO\perp$ 平面 $ABCE$ 于 O，$DF\perp AE$ 于 F，连接 OF，则 $OF\perp AE$，故∠$OFD=60°$. 在△ADE 中，$DF=\frac{AD\cdot DE}{AE}=\frac{6}{\sqrt{13}}$. 在 Rt△$ODF$ 中，$DO=DF\cdot\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，则 $V_{D\text{-}ABCE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(AB+CE)\cdot BC\cdot DO=\frac{9\sqrt{39}}{13}$.

10. B　提示：以拱顶为原点，水平向右的直线为 x 轴，垂直向上的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 设抛物线的方程为 $x^2=-2py(p>0)$. 将抛物线两端点的坐标 $(\pm10,-4)$ 代入 $x^2=-2py$，得 $2p=25$，即抛物线方程为 $x^2=-25y$. 最长的两根支柱的横坐标为 ±2，代入 $x^2=-25y$，得 $y=-\frac{4}{25}$，则最长的支柱是 $-\frac{4}{25}-(-4)=\frac{96}{25}=3.84$(m).

11. A　提示：过点 P 作直线 $3x-4y+9=0$ 的垂线，垂足为 M. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，由抛物线定义，可知：当点 P、M、F 三点共线时，d_1+d_2 的值最小.

12. A　提示：由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和圆 $x^2+y^2=\left(\frac{b}{2}+c\right)^2$ 有四个交点，得 $b<\frac{b}{2}+c<a$，即 $\begin{cases}b<2c,\\ \frac{b}{2}<a-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2<4c^2,\\ \frac{a^2-c^2}{4}<a^2-2ac+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<5c^2,\\ 5c^2-8ac+3a^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e>\frac{\sqrt{5}}{5},\\ e<\frac{3}{5}\text{或}e>1.\end{cases}$ 又 $e<1$，则 $\frac{\sqrt{5}}{5}<e<\frac{3}{5}$.

13. $\sqrt{2}x-4y-8\sqrt{2}=0$　提示：圆心为 $M(-1,0)$，点 C 的坐标为 $(0,-2\sqrt{2})$，则直线 MC 的斜率为 $-2\sqrt{2}$，故所求切线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 所求切线的方程为 $y+2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，即 $\sqrt{2}x-4y-8\sqrt{2}=0$.

14. 80　提示：易得该几何体是正四棱锥. 该正四棱锥的底面是边长为 8 的正方形，侧面三角形的底边为 8，对应的高为 5.

15. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　提示：不妨设点 B_1 在 x 轴上方，由 $AB_2\perp FB_1$，得 $\overrightarrow{AB_2}\cdot\overrightarrow{FB_1}=0$，即 $(a,-b)\cdot(c,b)=0$，则 $b^2=ac\Rightarrow c^2-a^2=ac\Rightarrow e^2-e-1=0$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$　提示：点 E 是 PA 的中点，则点 E 到平面 PBC 的距离等于点 A 到平面 PBC 的距离的一半. 由 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，得平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$. 在平面 $ABCD$ 内作 $AG\perp BC$，垂足为

G,则 $AG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,即点 A 到平面 PBC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

17. 直线 AC 的方程为 $y=\tan\alpha(x-1)$,即 $\tan\alpha\cdot x-y-\tan\alpha=0$. 圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心到 AC 的距离 $d=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}=\sin\alpha$,则 $|AC|=2\sqrt{4-\sin^2\alpha}$.

同理,$|BD|=2\sqrt{4-\cos^2\alpha}$.

$S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=2\sqrt{16-4(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$

$=2\sqrt{12+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}$,则当 $\sin^2 2\alpha=1$ 时,S 取得最大值 7,S 取得最大值时,$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

18. (1)取 BC 边的中点 D,连接 AD、PD,则 $AD\perp BC$,$PD\perp BC$,故 $BC\perp$平面 APD,从而 $PA\perp BC$.

(2)$\angle PDA$ 是侧面与底面所成二面角的平面角. 易知点 O 在 AD 上,过点 O 作 $OE\perp PD$,垂足为 E,则 OE 就是点 O 到侧面的距离. 设 $OE=h$,$\angle PDO=60^\circ$,则 $OP=2h$,$OD=\frac{2h}{\sqrt{3}}$,$BC=4h$. $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(4h)^2=4\sqrt{3}h^2$. 由 $72\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{3}h^2\cdot2h=\frac{8\sqrt{3}}{3}h^3$,得 $h=3$,即底面中心 O 到侧面的距离为 3.

19. (1)联立 $y=k(x+1)$ 和 $y^2=-x$,得 $ky^2+y-k=0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则 $y_1\cdot y_2=-1$.

由 $y_1^2=-x_1$,$y_2^2=-x_2$,得 $y_1^2\cdot y_2^2=x_1\cdot x_2=1$.

$k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$.

(2)直线 $y=k(x+1)$ 与 x 轴交于 $N(-1,0)$.

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAN}+S_{\triangle OBN}=\frac{1}{2}|ON|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k^2}+4}=\sqrt{10}$,解得 $k=\pm\frac{1}{6}$.

20. (1)平面 AA_1B_1B//平面 CC_1D_1D,平面 $EFD_1C\cap$平面 $CC_1D_1D=CD_1$,平面 $EFD_1C\cap$平面 $AA_1B_1B=EF$,则 EF//CD_1.

(2)$CD=4$,$CE=2\sqrt{2}$,$DE=2\sqrt{2}$,则 $CD^2=CE^2+DE^2$,故 $DE\perp CE$. 由 $DD_1\perp$平面 CED,得 $DD_1\perp CE$,则 $D_1E\perp CE$,故 $\angle D_1ED$ 为二面角 D_1-CE-D 的平面角.

在 Rt$\triangle DD_1E$ 中,$\tan D_1ED=\frac{DD_1}{DE}=\sqrt{3}$,则$\angle D_1ED=60^\circ$.

(3)易得 $CE\perp$平面 D_1DE. 又 $CE\subset$平面 CD_1E,则平面 $D_1DE\perp$平面 CED_1. 过点 D 作 $DH\perp D_1E$ 于 H,则 DH 为点 D 到平面 $CEFD_1$ 的距离. 可得 $DH=\sqrt{6}$.

21. (1)连接 AC,交 DE 于 F,连接 PF. 由 CD//AB,得$\angle BAC=\angle ACD$. 由 $AD=CD$,得$\angle DAC=\angle ACD$,则$\angle BAC=\angle DAC$,即 CA 平分$\angle BAD$. 易得$\triangle ADE$ 是正三角形,则 $AC\perp DE$,故 $PF\perp DE$,$CF\perp DE$,从而 $DE\perp$平面 $PCF\Rightarrow DE\perp PC$.

(2)过 P 作 $PO\perp AC$ 于 O,连接 OD,$AB=2a$. 由 $DE\perp$平面 PCF,得 $DE\perp PO$,则 $PO\perp$平面 $BCDE$,故$\angle PDO$ 就是直线 PD 与平面 $BCDE$ 所成的角. $\angle PFC$ 是二面角 P-DE-C 的平面角,则$\angle PFC=120^\circ$,故$\angle PFO=60^\circ$. 在正三角形 ADE 中,$AF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,则 $PF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $PO=PF\cdot\sin60^\circ=\frac{3}{4}a$,$\sin PDO=\frac{PO}{PD}=\frac{PO}{AD}=\frac{3}{4}$,则直线 PD 与平面 $BCDE$ 所成角的大小是 $\arcsin\frac{3}{4}$.

(3)由 DE//BC,DE 在平面 PBC 外,得 DE//平面 PBC,则点 D 到平面 PBC 的距离等于点 F 到平面 PBC 的距离.

过点 F 作 $FG\perp PC$,垂足为 G. 由 $DE\perp$平面 PCF,得 $BC\perp$平面 PCF,则平面 $PBC\perp$平面 PCF,故 $FG\perp$平面 PBC,从而 FG 的长即为点 F 到平面 PBC 的距离. $PF=CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 由$\angle PFC=120^\circ$,得$\angle FPC=\angle FCP=30^\circ$,则 $FG=\frac{1}{2}PF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

22. (1)由$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,得 NP 为 AM 的垂直平分线,则$|NA|=|NM|$. 又$|CN|+|NM|=2\sqrt{2}$,故$|CN|+|AN|=2\sqrt{2}>2$. 动点 N 的轨迹是以点 $C(-1,0)$、$A(1,0)$为焦点的椭圆. 椭圆长轴长为 $2a=2\sqrt{2}$,焦距为 $2c=2$,则 $a=\sqrt{2}$,$c=1$,$b^2=1$,故曲线 E 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)当直线 GH 的斜率存在时,设直线 GH 的方程为 $y=kx+2$. 联立 $y=kx+2$ 和$\frac{x^2}{2}+y^2=1$,得$\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+4kx+3=0$. 由 $\Delta>0$,得 $k^2>\frac{3}{2}$.

设 $G(x_1,y_1)$、$H(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-4k}{\frac{1}{2}+k^2}$,$x_1x_2=\frac{3}{\frac{1}{2}+k^2}$. 由$\overrightarrow{FG}=\lambda\overrightarrow{FH}$,得$(x_1,y_1-2)=\lambda(x_2,y_2-2)$,则 $x_1=\lambda x_2$,故 $x_1+x_2=(1+\lambda)x_2$,$x_1x_2=\lambda x_2^2\Rightarrow\left(\frac{x_1+x_2}{1+\lambda}\right)^2=x_2^2=\frac{x_1x_2}{\lambda}\Rightarrow\frac{\left(\frac{-4k}{\frac{1}{2}+k^2}\right)^2}{(1+\lambda)^2}=\frac{\frac{3}{\frac{1}{2}+k^2}}{\lambda}$,整理得$\frac{16}{3\left(\frac{1}{2k^2}+1\right)}=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$.

由 $k^2>\frac{3}{2}$,得 $4<\frac{16}{\frac{3}{2k^2}+3}<\frac{16}{3}$,即 $4<\lambda+\frac{1}{\lambda}+2<\frac{16}{3}$,解得$\frac{1}{3}<\lambda<3$ 且 $\lambda\neq1$. 又 $0<\lambda<1$,则$\frac{1}{3}<\lambda<1$.

当直线 GH 的斜率不存在时,直线 GH 的方程为 $x=0$,$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FH}$,$\lambda=\frac{1}{3}$.

故所求 λ 的取值范围是$\left[\frac{1}{3},1\right)$.

(责任编辑　袁伟刚)