江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三高考适应性测试
数 学

一、选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$a,b\in\mathbf{R}$，虚数$z=1+b\mathrm{i}$是方程$x^2+ax+3=0$的根，则$|z|=$(　)

A.$\sqrt{2}$　　B·$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

2.已知集合$A=\{(x,y)|\ x-y+1=0\},B=\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}$，则$A\cap B$的子集个数为(　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

3. "$\alpha>\dfrac{\pi}{2}$"是"$\alpha-\sin\alpha>\dfrac{\pi}{2}-1$"的(　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 为了贯彻落实《中共中央国务院关于深入打好污染防治攻坚战的意见》，某造纸企业的污染治理科研小组积极探索改良工艺，使排放的污水中含有的污染物数量逐渐减少.已知改良工艺前所排放废水中含有的污染物数量为$2.25\mathrm{g/m^3}$，首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量为$2.21\mathrm{g/m^3}$，第n次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量r_n满足函数模型$r_n=r_0+(r_1-r_0)\cdot 3^{0.25n+t}(t\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，其中$r_0$为改良工艺前所排放的废水中含有的污染物数量，$r_1$为首次改良工艺后所排放的废水中含有的污染物数量，$n$为改良工艺的次数，假设废水中含有的污染物数量不超过$0.25\mathrm{g/m^3}$时符合废水排放标准，若该企业排放的废水符合排放标准，则改良工艺的次数最少要(参考数据:$\lg2\approx0.30$，$\lg3\approx0.48$) (　)

A.14 次　　B.15 次　　C.16 次　　D.17 次

5. 已知$\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^n(n\in N^*)$的展开式中常数项为 20,则$n=$(　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

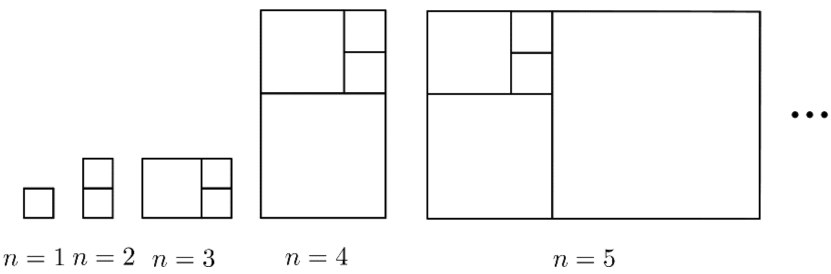
6. 斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq3)$，其每一项称为"斐波那契数".如图，在以斐波那契数为边长的正方形拼成的长方形中，利用下列各图中的面积关系，推出$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_{2023}^2}{a_{2023}}$是斐波那契数列的第(　)项.

A.2022

B.2023

C.2024

D.2025



7. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，以$F_2$为圆心的圆与$x$轴交于$F_1,B$两点,与$y$轴正半轴交于点$A$,线段$AF_1$与$C$交于点$M$.若$|BM|$与$C$的焦距的比值为$\frac{\sqrt{31}}{3}$,则$C$的离心率为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

8. 某人欲走楼梯上楼，从一层到二层需跨 10 级台阶. 他一步可能跨 1 级台阶, 称为一阶步, 也可能跨 2 级台阶, 称为二阶步, 最多能跨 3 级台阶, 称为三阶步. 从一层上到二层他总共跨了 6 步, 而且任何相邻两步均不同阶. 则他从一层到二层可能的不同走法共有(　　)种.

A.10　　B.9　　C.8　　D.12

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 随机抽取 6 位影迷对电影《长津湖》的评分，得到一组样本数据如下:92,93,95,95,97,98，则下列关于该样本的说法中正确的有(　　)

A.均值为 95　　B.极差为 6

C.方差为 26　　D.第 80 百分位数为 97

10. 已知函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$上单调,且$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$对称,则(　　)

A.$f(x)$的最小正周期为4π

B.$f\left(\frac{2\pi}{9}\right)>f\left(\frac{10\pi}{9}\right)$

C.将$f(x)$的图象向右平移$\frac{4\pi}{3}$个单位长度后对应的函数为偶函数

D.函数$y=5f(x)+4$在$[0,\pi]$上有且仅有一个零点

11.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}}{2}$，则下列说法正确的是(　　)

A.$a_{2023}>a_{2022}$　　B.$4a_{n+1}^2-1=4a_{n+1}a_n$

C.$\frac{1}{a_n^2}+\frac{15}{a_{n+1}^2}$的最小值为$8+\sqrt{15}$　　D.$a_{2023}^2<1012$

12. 设函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数， $f(2x+1)-f(2-2x)=4x-1$， $f(1)=1$，则下列说法中一定正确的有(　　)

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$　　B. $f(2)=2$　　C. $f'\left(\frac{123}{2}\right)=0$　　D. $\sum_{i=1}^{59}f'\left(\frac{i}{20}\right)=59$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$A\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的取值范围是__________.

14. 某班有 45 名同学,一次考试后的数学成绩服从正态分布$N(80,5^2)$,则理论上在 85 分到 90 分的人数约是__________.(按四舍五入法保留整数)

附:$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$;$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$;
$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

15. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{10}-\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 0\\ x\mathrm{e}^{x-1}+1,x>0\end{cases}$,$A,B$为函数$f(x)$的图象上任意两点,$O$为坐标原点,则$\angle AOB$的最大值为__________.

16. 已知正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的上底面的边长为$\sqrt{2}$, 底面的边长为$2\sqrt{2}$, 该正四棱台的侧面积为S_1, 外接球表面积为S_2, 当S_2取得最小值时, $\frac{S_1}{S_2}$的值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$a_1=1$, $\frac{2S_n}{a_n}=n+1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

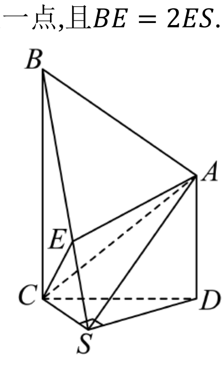
(2)记数列$\left\{\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$, 求集合$\{k\mid T_k\leqslant 10,k\in\mathrm{N}^*\}$中元素的个数.

18.（12 分）

如图,在四棱锥$S-ABCD$中,$ABCD$为直角梯形,$AD//BC,BC\perp CD$,平面$SCD\perp$平面$ABCD$.
$\triangle SCD$是以CD为斜边的等腰直角三角形,$BC=2AD=2CD=4$,E为BS上一点,且$BE=2ES$.

(1)证明:直线$SD//$平面ACE;

(2)求二面角$S-AE-C$的余弦值.



19.（12 分）

设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对边分别为$a,b,c(a,b,c\in N^*)$,若$\frac{1+\cos B}{2-\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

(1)求$\frac{a+c}{b}$的值;

(2)若$a<b$且三个内角中最大角是最小角的两倍,当$\triangle ABC$周长取最小值时,求$\triangle ABC$的面积.

20.（12 分）

在 2023 年五一期间，为了进一步发挥电子商务在活跃消费市场方面的积极作用，保障人民群众度过一个平安健康快乐祥和的佳节，甲公司和乙公司在某购物平台上同时开启了打折促销，直播带货活动，甲公司和乙公司所售商品类似，存在竞争关系.

(1)现对某时间段 100 名观看直播后选择这两个公司直播间购物的情况进行调查，得到如下数据：

	选择甲公司直播间购物	选择乙公司直播间购物	合计
用户年龄段 19—24 岁	40		50
用户年龄段 25—34 岁		30	
合计			

是否有 99.9%的把握认为选择哪家直播间购物与用户的年龄有关？

(2)若小李连续两天每天选择在甲、乙其中一个直播间进行购物，第一天等可能地从甲、乙两家中选一家直播间购物，如果第一天去甲直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为 0.7；如果第一天去乙直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为 0.8，求小李第二天去乙直播间购物的概率；

(3)甲公司购物平台直播间进行“秒杀”活动，假设直播间每人下单成功的概率均为 $p(0<p<1)$，每人下单成功与否互不影响，若从直播间中随机抽取五人，记五人中恰有 2 人下单成功的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0.

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

χ^2 独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值表：

$p(\chi^2\geq k)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

21.（12 分）

已知$F_1(-2,0),F_2(2,0)$为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,且$A\left(2,\frac{5}{3}\right)$为椭圆上的一点.

(1)求椭圆E的方程;

(2)设直线$y=-2x+t$与抛物线$y^2=2px(p>0)$相交于P,Q两点,射线F_1P,F_1Q与椭圆E分别相交于M、N.试探究:是否存在数集D,对于任意$p\in D$时,总存在实数t,使得点F_1在以线段MN为直径的圆内?若存在,求出数集D并证明你的结论;若不存在,请说明理由.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^{x+1}+ax+a$ （$a\in\mathbf{R}$）.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\geq 0$ 时，$f(x-1)+\ln(x+1)\geq 1$，求实数 a 的取值范围。

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三高考适应性测试

数 学 答 案

一、选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$a,b\in\mathbf{R}$，虚数$z=1+b\mathrm{i}$是方程$x^2+ax+3=0$的根，则$|z|=$(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B·$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

答案：B

2.已知集合$A=\{(x,y)|\ x-y+1=0\},B=\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}$，则$A\cap B$的子集个数为(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

答案：A

3.“$\alpha>\dfrac{\pi}{2}$”是“$\alpha-\sin\alpha>\dfrac{\pi}{2}-1$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

答案：C

4. 为了贯彻落实《中共中央国务院关于深入打好污染防治攻坚战的意见》，某造纸企业的污染治理科研小组积极探索改良工艺，使排放的污水中含有的污染物数量逐渐减少.已知改良工艺前所排放废水中含有的污染物数量为$2.25\mathrm{g/m^3}$，首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量为$2.2\mathrm{lg/m^3}$，第n次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量r_n满足函数模型$r_n=r_0+(r_1-r_0)\cdot 3^{0.25n+t}(t\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，其中$r_0$为改良工艺前所排放的废水中含有的污染物数量，$r_1$为首次改良工艺后所排放的废水中含有的污染物数量，$n$为改良工艺的次数，假设废水中含有的污染物数量不超过$0.25\mathrm{g/m^3}$时符合废水排放标准，若该企业排放的废水符合排放标准，则改良工艺的次数最少要(参考数据:lg2 ≈ 0.30，lg3 ≈ 0.48) (　　)

A.14 次　　B.15 次　　C.16 次　　D.17 次

答案：C

5. 已知$\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^n(n\in N^*)$的展开式中常数项为 20,则$n=$(　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

答案：A

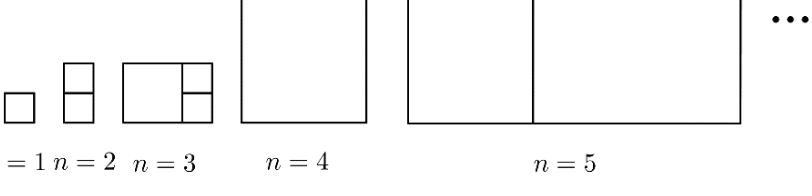
6. 斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3)$，其每一项称为“斐波那契数”.如图，在以斐波那契数为边长的正方形拼成的长方形中，利用下列各图中的面积关系，推出$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_{2023}^2}{a_{2023}}$是斐波那契数列的第(　　)项.

A.2022

B.2023

C.2024

D.2025



$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$

答案：C

7. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，以$F_2$为圆心的圆与$x$轴交于$F_1,B$两点,与$y$轴正半轴交于点$A$,线段$AF_1$与$C$交于点$M$.若$|BM|$与$C$的焦距的比值为$\frac{\sqrt{31}}{3}$,则$C$的离心率为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

答案：D

8. 某人欲走楼梯上楼，从一层到二层需跨 10 级台阶. 他一步可能跨 1 级台阶, 称为一阶步, 也可能跨 2 级台阶, 称为二阶步, 最多能跨 3 级台阶, 称为三阶步. 从一层上到二层他总共跨了 6 步, 而且任何相邻两步均不同阶. 则他从一层到二层可能的不同走法共有(　　)种.

A.10　　B.9　　C.8　　D.12

答案：A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 随机抽取 6 位影迷对电影《长津湖》的评分，得到一组样本数据如下:92,93,95,95,97,98，则下列关于该样本的说法中正确的有(　　)

A.均值为 95　　B.极差为 6

C.方差为 26　　D.第 80 百分位数为 97

答案：ABD

10. 已知函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$上单调,且$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$对称,则(　　)

A.$f(x)$的最小正周期为4π

B.$f\left(\frac{2\pi}{9}\right)>f\left(\frac{10\pi}{9}\right)$

C.将$f(x)$的图象向右平移$\frac{4\pi}{3}$个单位长度后对应的函数为偶函数

D.函数$y=5f(x)+4$在$[0,\pi]$上有且仅有一个零点

答案：ACD

11.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}}{2}$，则下列说法正确的是(　　)

A.$a_{2023}>a_{2022}$　　B.$4a_{n+1}^2-1=4a_{n+1}a_n$

C.$\frac{1}{a_n^2}+\frac{15}{a_{n+1}^2}$的最小值为$8+\sqrt{15}$　　D.$a_{2023}^2<1012$

答案：ABD

12. 设函数$f(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，$f'(x)$为$f(x)$的导函数，$f(2x+1)-f(2-2x)=4x-1$，$f(1)=1$，则下列说法中一定正确的有(　　)

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$　　B. $f(2)=2$　　C. $f'\left(\frac{123}{2}\right)=0$　　D. $\sum_{i=1}^{59}f'\left(\frac{i}{20}\right)=59$

答案：BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$A\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的取值范围是__________.

答案：$(0,12]$

14. 某班有 45 名同学,一次考试后的数学成绩服从正态分布$N(80,5^2)$,则理论上在 85 分到 90 分的人数约是__________.(按四舍五入法保留整数)

附:$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$; $P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$;

$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

答案：6

15. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{10}-\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 0\\ xe^{x-1}+1,x>0\end{cases}$,$A,B$为函数$f(x)$的图象上任意两点,$O$为坐标原点,则$\angle AOB$的最大值为__________.

答案：$\frac{\pi}{4}$

16. 已知正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的上底面的边长为$\sqrt{2}$, 底面的边长为$2\sqrt{2}$, 该正四棱台的侧面积为S_1, 外接球表面积为S_2, 当S_2取得最小值时, $\frac{S_1}{S_2}$的值是________.

答案：$\frac{3\sqrt{7}}{8\pi}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$a_1=1$, $\frac{2S_n}{a_n}=n+1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记数列$\left\{\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$, 求集合$\{k\mid T_k\leqslant 10,k\in\mathrm{N}^*\}$中元素的个数.

解：(1)因为$\frac{2S_n}{a_n}=n+1$,所以$2S_n=(n+1)a_n$,

所以$2a_{n+1}=2S_{n+1}-2S_n=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$,……………………………………2 分

所以$na_{n+1}=(n+1)a_n$,即$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$.……………………………………………………3 分

又因为$a_1=1$,所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\cdots=\frac{a_1}{1}=1$,所以$a_n=n$.………………………………5 分

(2)因为$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_2\frac{n+1}{n}=\log_2(n+1)-\log_2 n$,

所以$T_n=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+(\log_2 4-\log_2 3)+\cdots+[\log_2(n+1)-\log_2 n]$

$=\log_2(n+1)-\log_2 1=\log_2(n+1)$.……………………………………………………8 分

令$T_k=\log_2(k+1)\leqslant 10$,得$k\leqslant 2^{10}-1,k\in\mathbf{N}^*$,

所以集合$\{k\mid T_k\leqslant 10,k\in\mathbf{N}^*\}$中元素的个数为$2^{10}-1=1023$. ……………………… 10 分

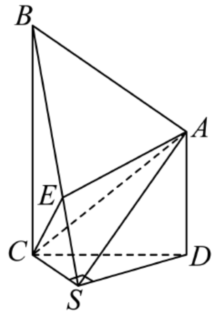
18.（12 分）

如图,在四棱锥$S-ABCD$中,$ABCD$为直角梯形,$AD//BC$,$BC\perp CD$,平面$SCD\perp$平面$ABCD$.

$\triangle SCD$是以CD为斜边的等腰直角三角形,$BC=2AD=2CD=2$,E为BS上一点,且$BE=2ES$.

(1)证明:直线$SD//$平面ACE;

(2)求二面角$S-AE-C$的余弦值.



(1)证明： 连接BD交AC于点F,连接EF.

因为$AD//BC$,所以$\triangle AFD$与$\triangle BCF$相似.

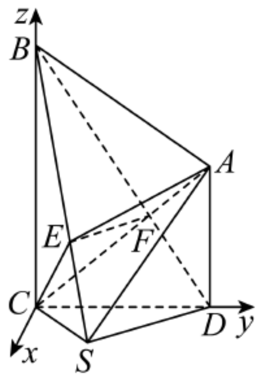
所以$\frac{BF}{FD}=\frac{BC}{AD}=2$.又$\frac{BE}{ES}=\frac{BF}{FD}=2$,所以$EF//SD$.

因为$EF\subset$平面ACE,$SD\not\subset$平面ACE,所以直线$SD//$平面ACE.

(2)解: 平面$SCD\perp$平面$ABCD$,平面$SCD\cap$平面$ABCD=CD$,$BC\subset$平面$ABCD$,

$BC\perp CD$,所以$BC\perp$平面SCD.

以C为坐标原点,$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}$所在的方向分别为$y$轴、$z$轴的正方向,与$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}$均垂直的方向作为$x$轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系$C-xyz$.



则$C(0,0,0),S(1,1,0),A(0,2,2),E\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$,

$\overrightarrow{CA}=(0,2,2),\overrightarrow{AS}=(1,-1,-2),\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{CE}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

设平面SAE的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AS}=x-y-2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z=0\end{cases}$,令$x=1$,得$\vec{m}=(3,1,1)$,

设平面EAC的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=2y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$,令$z=1$,得$\vec{n}=(-1,-1,1)$.

设二面角$S-AE-C$的平面角的大小为θ,

则$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

所以二面角$S-AE-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{33}}{11}$.

19.（12 分）

设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对边分别为$a,b,c(a,b,c\in N^*)$,若$\frac{1+\cos B}{2-\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

(1)求$\frac{a+c}{b}$的值;

(2)若$a<b$且三个内角中最大角是最小角的两倍,当$\triangle ABC$周长取最小值时,求$\triangle ABC$的面积.

解： (1)因为$\frac{1+\cos B}{2-\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$,所以$\sin A+\sin A\cos B=2\sin B-\cos A\sin B$,因为$C=\pi-(A+B)$,

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

所以$\sin A+\sin C=2\sin B$,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得$a+c=2b$,即$\frac{a+c}{b}=2$.

(2)由$a+c=2b$可得:$c-b=b-a>0$,故$c>b>a$,于是$C=2A$由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$及余弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$可得:

$\frac{c}{a}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=2\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{b^2+(c+a)(c-a)}{bc}=\frac{b^2+2b(c-a)}{bc}=\frac{b+2(c-a)}{c}=\frac{c+a+4(c-a)}{2c}=\frac{5c-3a}{2c}$解得:$c=a$(舍)或者$c=\frac{3}{2}a$,故$b=\frac{5}{4}a$,

因为$a,b,c\in N^*$,所以当$a=4$时,周长最小,此时$a=4,b=5,c=6,\cos A=\frac{c}{2a}=\frac{3}{4}$,

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

20.（12 分）

在 2023 年五一期间，为了进一步发挥电子商务在活跃消费市场方面的积极作用，保障人民群众度过一个平安健康快乐祥和的佳节，甲公司和乙公司在某购物平台上同时开启了打折促销，直播带货活动，甲公司和乙公司所售商品类似，存在竞争关系.

(1)现对某时间段 100 名观看直播后选择这两个公司直播间购物的情况进行调查，得到如下数据：

	选择甲公司直播间购物	选择乙公司直播间购物	合计
用户年龄段 19—24 岁	40		50
用户年龄段 25—34 岁		30	
合计			

是否有 99.9%的把握认为选择哪家直播间购物与用户的年龄有关？

(2)若小李连续两天每天选择在甲、乙其中一个直播间进行购物，第一天等可能地从甲、乙两家中选一家直播间购物，如果第一天去甲直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为 0.7；如果第一天去乙直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为 0.8，求小李第二天去乙直播间购物的概率；

(3)甲公司购物平台直播间进行“秒杀”活动，假设直播间每人下单成功的概率均为$p(0<p<1)$，每人下单成功与否互不影响，若从直播间中随机抽取五人，记五人中恰有 2 人下单成功的概率为$f(p)$，求$f(p)$的最大值点p_0.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

χ^2独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值表：

$p(\chi^2\ge k)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

解:（1）列联表如下：

	选择甲公司直播间购物	选择乙公司直播间购物	合计
用户年龄段 19—24 岁	40	10	50
用户年龄段 25—34 岁	20	30	50
合计	60	40	100

所以 $\chi^2=\frac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}>10.828$，故有99.9%的把握认为选择哪家直播间购物与用户的年龄有关.

（2）由题设，小李第二天去乙直播间的基本事件：{第一天去甲直播间，第二天去乙直播间}；{第一天去乙直播间，第二天去乙直播间}，两种情况，

所以小李第二天去乙直播间购物的概率 $P=0.5\times(1-0.7)+0.5\times(1-0.8)=0.25$.

（3）由题设，设五人中下单成功的人数为 X，则 $X\sim B(5,p)$，

所以 $f(p)=C_5^2(1-p)^3p^2=10(1-p)^3p^2$，令 $g(p)=(1-p)^3p^2=p^2-3p^3+3p^4-p^5$，

所以 $g'(p)=p(2-9p+12p^2-5p^3)$，令 $h(p)=2-9p+12p^2-5p^3$，

所以 $h'(p)=-9+24p-15p^2=-15(p-\frac{4}{5})^2+\frac{3}{5}$，

$h'(p)$ 开口向下，且 $(0,\frac{4}{5})$ 上递增，$(\frac{4}{5},1)$ 上递减，又 $h'(\frac{3}{5})=h'(1)=0$，

故 $(0,\frac{3}{5})$ 上 $h'(p)<0$，$h(p)$ 递减；$(\frac{3}{5},1)$ 上 $h'(p)>0$，$h(p)$ 递增；

由 $h(\frac{2}{5})=0$，$h(1)=0$，故 $(0,\frac{2}{5})$ 上 $h(p)>0$，即 $g'(p)>0$，$(\frac{2}{5},1)$ 上 $h(p)<0$，

即 $g'(p)<0$，

所以 $g(p)$ 在 $(0,\frac{2}{5})$ 上递增，$(\frac{2}{5},1)$ 上递减，即 $f(p)$ 在 $(0,\frac{2}{5})$ 上递增，$(\frac{2}{5},1)$ 上递减，

所以 $f(p)_{\max}=f(\frac{2}{5})$，即 $p_0=\frac{2}{5}$.

21.（12分）

已知$F_1(-2,0),F_2(2,0)$为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,且$A\left(2,\frac{5}{3}\right)$为椭圆上的一点.

(1)求椭圆E的方程;

(2)设直线$y=-2x+t$与抛物线$y^2=2px(p>0)$相交于P,Q两点,射线F_1P,F_1Q与粗圆E分别相交于M、N.试探究:是否存在数集D,对于任意$p\in D$时,总存在实数t,使得点F_1在以线段MN为直径的圆内?若存在,求出数集D并证明你的结论;若不存在,请说明理由.

解:(1)由题意知$c=2,A\left(2,\frac{5}{3}\right)$为椭圆上的一点,且$AF_2$垂直于$x$轴,则$|AF_1|=\frac{13}{3},|AF_2|=\frac{5}{3}$,

所以$2a=|AF_1|+|AF_2|=6$,即$a=3$,故椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1;\cdots\cdots\cdots$4分

(2)l方程为$y=-2x+t$,与抛物线方程联立,得$\begin{cases}y^2=2px\\y=-2x+t\end{cases}$,整理得$y^2+py-pt=0$,

则$\Delta=p^2+4tp>0$,则$p+4t>0(1)$,设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

则$y_1+y_2=-p,y_1y_2=-pt$,则$x_1+x_2=t+\frac{p}{2},x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{t^2}{4}$， ………6分

由F_1的坐标为$(-2,0)$,则$\overrightarrow{F_1P}=(x_1+2,y_1),\overrightarrow{F_1Q}=(x_2+2,y_2)$,
由$\overrightarrow{F_1M}$与$\overrightarrow{F_1P}$同向,$\overrightarrow{F_1N}$与$\overrightarrow{F_1Q}$同向,
则点F_1在以线段MN为直径的圆内,则$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}<0$,则$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}<0$,………8分
则$(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2<0$,即$x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_1<0$,

则$\frac{t^2}{4}+2\left(t+\frac{p}{2}\right)+4-pt<0$即$\frac{t^2}{4}+(2-p)t+p+4<0(2)$,

当且仅当$\Delta=(2-p)^2-4\times\frac{1}{4}(p+4)>0$,即$p>5$,…………10分

总存在$t>-\frac{p}{4}$使得(2)成立,

且当$p>5$时,由韦达定理可知$\frac{t^2}{4}+(2-p)t+p+4=0$的两个根为正数,

故使(2)成立的$t>0$,从而满足(1),
故存在数集$D=(5,+\infty)$,对任意$p\in D$时,总存在t,使点F_1在线段MN为直径的圆内.……12分

22.（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=e^{x+1}+ax+a$ （$a\in\mathbf{R}$）.

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

(2)当 $x\geq0$ 时， $f\left(x-1\right)+\ln\left(x+1\right)\geq1$，求实数 a 的取值范围

解: (1)由题知$f(x)=e^{x+1}+ax+a$,$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$\therefore f'(x)=e^{x+1}+a$.…………1 分
当$a\geq0$时,$f'(x)>0$在$\mathbf{R}$上恒成立,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数;.……………2 分
当$a<0$时,令$f'(x)=0$得$x=\ln(-a)-1$,……………………3 分
在$(-\infty,\ln(-a)-1)$上有$f'(x)<0$,在$(\ln(-a)-1,+\infty)$上有$f'(x)>0$,
$\therefore f(x)$在$(-\infty,\ln(-a)-1)$上是减函数,在$(\ln(-a)-1,+\infty)$上是增函数.………… 5 分
(2)当$x\geq0$时,$f(x-1)+\ln(x+1)\geq1$,即$e^x+ax+\ln(x+1)-1\geq0$ (*).………6 分

令$g(x)=e^x+ax+\ln(x+1)-1(x\geq0)$,则$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a(x\geq0)$.

①若$a\geq-2$,由(1)知,当$a=-1$时,$f(x)=e^{x+1}-x-1$在$(-1,+\infty)$上是增函数
故有$f(x)\geq f(-1)=e^{-1+1}+1-1=1$..7 分
即$f(x)=e^{x+1}-x-1\geq1$,得$e^{x+1}\geq x+1+1$,故有$e^x\geq1+x$.

则$e^x+\frac{1}{x+1}\geq2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{x+1}}\geq2$,得$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a\geq0$.……………8 分

$\therefore$函数$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,$\therefore g(x)\geq g(0)=0$， $\therefore$ (*)式成立.…………9 分

②若$a<-2$,令$\varphi(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a$，

则$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\geq0$,当且仅当$x=0$时等号成立.

$\therefore$函数$\varphi(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增.

$\because \varphi(0)=2+a<0, \varphi(-a)=e^{-a}+\frac{1}{1-a}+a \geq 1-a+\frac{1}{1-a}+a=1+\frac{1}{1-a}>0$ ………10分

$\therefore \exists x_0 \in (0,-a)$,使得$\varphi(x_0)=0$,则当$0<x<x_0$时,$\varphi(x)<\varphi(x_0)=0$,即$g'(x)<0$.
$\therefore$函数$g(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递减.
$\therefore g(x_0)<g(0)=0$，即(*)式不恒成立.…………………………11 分
综上所述,实数a的取值范围是$[-2,+\infty)$.…………………………12 分