江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科导学案

利用导数研究函数的基本问题

研制人：姜业锋　审核人：陈宏强

班级：＿＿＿＿＿＿＿姓名：＿＿＿＿＿＿＿学号：＿＿＿＿＿授课日期：

【考情分析】

函数与导数是高考的必考内容之一,一般 2 个客观题,1 个解答题.导数的几何意义是高考的一个高频考点,考查热点主要有:求曲线在某点处的切线方程,求经过一点的切线方程;确定满足条件的切线的条数;根据切线的条数求变量的取值范围;求两条曲线的公切线等.导数在研究函数单调性,求函数极值与最值中有着广泛应用,也是高考热点之一,作为客观题出现的此类问题,难度一般中等或中等以上.导数解答题是每年必考题,该题一般分 2 问,第 1 问一般考查函数的单调性与极值,第 2 问一般综合考查导数的应用,如研究函数零点、证明不等式、不等式恒成立、不等式能成立等问题,难度控制在中等以上.

【真题感悟】

1.(2022 全国甲卷・理科)当$x=1$时,函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值-2,则$f'(2)=$(　　)

A. -1　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.1

2.(2022 全国乙卷)函数$f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$在区间$[0,2\pi]$的最小值、最大值分别为(　　)

A.$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　B.$-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　C.$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$　　D.$-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$

3.(2021 新高考全国 Ⅰ 卷)函数$f(x)=|2x-1|-2\ln x$的最小值为＿＿＿＿＿＿＿.

4.(2022 新高考全国 Ⅰ 卷)若曲线$y=(x+a)e^x$有两条过坐标原点的切线,则a的取值范围是＿＿＿＿＿.

【典例导引】

例 1.(2022 全国甲卷・文科)已知函数$f(x)=x^3-x,g(x)=x^2+a$,曲线$y=f(x)$在点$\left(x_1,f(x_1)\right)$处的切线也是曲线$y=g(x)$的切线.

(1)若$x_1=-1$,求a;

(2)求a的取值范围.

例 2.(2022 北京卷)已知函数$f(x)=e^x\ln(1+x)$.

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)设$g(x)=f'(x)$,讨论函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性;

(3)证明:对任意的$s,t\in(0,+\infty)$,有$f(s+t)>f(s)+f(t)$.

例 3.已知函数$f(x)=a\ln x+x-\frac{1}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a<0$时,讨论函数$f(x)$的单调性;

(2)若正数m,n满足$\mathrm{e}^{m+n}=\frac{n}{m}$,求证$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}>2$.

例 4.(2021 全国乙卷)设函数$f(x)=\ln(a-x)$,已知$x=0$是函数$y=xf(x)$的极值点.

(1)求a;

(2)设函数$g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$.证明:$g(x)<1$.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科作业

利用导数研究函数的基本问题

研制人：姜业锋　　审核人：陈宏强

班级：__________ 姓名：__________ 学号：________ 时长：60 分钟

1.(2022 广东茂名市高州市二模)过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线,则切点的纵坐标为(　　)

A.e　　B.1　　C.$\frac{1}{\sqrt{e}}$　　D.$\frac{1}{e}$

2.已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x},\forall m,n\in[1,2],m\neq n$时,都有$\frac{f(m+1)-f(n+1)}{m-n}>0$,则实数$a$的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,1)$　　B.$(-\infty,1]$　　C.$(-\infty,2)$　　D.$(-\infty,2]$

3.(2021 湖北高三二模)已知函数$f(x)=2x^3+3mx^2+2nx+m^2$在$x=1$处有极小值 6，则$m=$(　　)

A.5　　B.3　　C. -2　　D. -2 或 5

4.(2021 辽宁沈阳市一模)已知函数$f(x)=x+\frac{a}{2x}$.若曲线$y=f(x)$存在两条过点(2,0)的切线,则a的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,1)\cup(8,+\infty)$　　B.$(-\infty,-1)\cup(8,+\infty)$　　C.$(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$　　D.$(-\infty,-8)\cup(0,+\infty)$

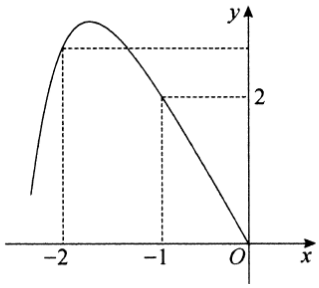
5.(多选题)(2022 湖南长沙市三模)已知定义在**R**上的奇函数$f(x)$的部分图象如图所示,$f'(x)$是$f(x)$的导函数,则下列结论中正确的是(　　)

A.$f(2)=-1$

B.$f(1)\cdot f(2)>4$

C.$f'(1)\cdot f'(2)<0$

D.方程$f'(x)=0$无解



6.(多选题)(2021 湖北武汉市三模)已知函数$f(x)=e^x-e^{-x}-\sin 2x$，若$f(x_1)>f(x_2)$,则(　　)

A.$x_1^2>x_2^2$　　B.$e^{x_1-x_2}>1$　　C.$\ln|x_1|>\ln|x_2|$　　D.$x_1|x_1|>x_2|x_2|$

7.(2022 新高考全国 II 卷)写出曲线$y=\ln|x|$过坐标原点的切线方程________，________.

8.(2022 福建厦门市二模)已知$f(x)=x\ln x-2x+a,x\in[1,e^2]$.若$f(x)\leqslant 0$恒成立,则$a$的取值范围为________.

9.已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1,a>0$.

(1)当$a=1$时,求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2)是否存在实数a,使得$f(x)$在[0,2]上的最小值为$\frac{5}{6}$?若存在,求出a的值;若不存在,请说明理由.

10.已知函数$f(x) = \mathrm{e}^x - ax - a$.

(1)当$a = 1$时,求过点$(0, -1)$且与曲线$y = f(x)$相切的直线方程;

(2)若$f(x) \geqslant 0$,求实数a的取值范围.

11. (2021 山东聊城市一模)设$f(x) = ax^3 + x\ln x$.

(1)求函数$g(x) = \frac{f(x)}{x}$的单调区间;

(2)若$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且$x_1 > x_2$,$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$,求实数$a$的取值范围.