

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科导学案

利用导数研究方程与不等式

研制人：童旗军 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

【考情分析】

函数与导数是高考的必考内容之一,一般 2 个客观题,1 个解答题.导数的几何意义是高考的一个高频考点,考查热点主要有:求曲线在某点处的切线方程,求经过一点的切线方程;确定满足条件的切线的条数;根据切线的条数求变量的取值范围;求两条曲线的公切线等.导数在研究函数单调性,求函数极值与最值中有着广泛应用,也是高考热点之一,作为客观题出现的此类问题,难度一般中等或中等以上.导数解答题是每年必考题,该题一般分 2 问,第 1 问一般考查函数的单调性与极值,第 2 问一般综合考查导数的应用,如研究函数零点、证明不等式、不等式恒成立、不等式能成立等问题,难度控制在中等以上.

【真题感悟】

1.(多选题)(2021 北京卷)已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$,则()

A.若 $k = 0$,则 $f(x)$ 有两个零点

B. $\exists k < 0$,使得 $f(x)$ 有一个零点

C. $\exists k < 0$,使得 $f(x)$ 有三个零点

D. $\exists k > 0$,使得 $f(x)$ 有三个零点

2.(2021 新高考全国 I 卷改编)已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设 a, b 为两个不相等的正数,且 $b \ln a - a \ln b = a - b$,证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.

【典例导引】

例 1.(2022 山东泰安市三模)已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - x \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1)若函数 $f(x)$ 是增函数,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $a = 0$,函数 $g(x) = f(x) + e^x - \sin x - 1$,证明:当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立.

例 2.(2022 湖南湘潭市二模)已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - \sin x$, e 为自然对数的底数.

(1)求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2)当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1 - x - \sin x$,求实数 a 的最大值.

例 3.(2022 湖北荆州市一模)设函数 $f(x) = ax \ln x$,其中 $a \in \mathbf{R}$,曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线经过点 $(3, 2)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)证明: $f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$.

例 4.(1)讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性,并证明当 $x > 0$ 时, $(x-2)e^x + x + 2 > 0$;

(2)证明:当 $a \in [0, 1)$ 时,函数 $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2} (x > 0)$ 有最小值.设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$,求函数 $h(a)$ 的值域.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科作业

利用导数研究方程与不等式

研制人：童旗军 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时长：60 分钟

- 1.(2022 广东深圳市三模)已知函数 $f(x) = x - a\sin x$,则“ $a = 2$ ”是“ $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点”的 ()
- A.充分不必要条件 B.必要不充分条件
C.充要条件 D.既不充分又不必要条件
- 2.(2022 福建龙岩市二模)已知函数 $f(x) = x\cos x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [0, \pi)$,则函数 $f(x)$ 的最大值是 ()
- A. $-\cos 1$ B. $-\sin 1$ C. -1 D. $-\sqrt{2}$
- 3.(2021 辽宁丹东市质量检测)设函数 $f(x) = \sin x + e^x - e^{-x} - x + 1$,则满足 $f(x) + f(3 - 2x) < 2$ 的 x 的取值范围是()
- A. $(3, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-\infty, 1)$
- 4.(2022 山东济宁市二模)已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ a\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - f(-x)$ 有 5 个零点,则实数 a 的取值范围是()
- A. $(-e, 0)$ B. $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ C. $(-\infty, -e)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$
- 5.(多选题)(2021 广东珠海市二模)已知函数 $f(x) = -x^2\ln x$,则()
- A. $f(x) \leq 0$ 恒成立 B. $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数
C. $f(x)$ 在 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 得到极大值 $\frac{1}{2e}$ D. $f(x)$ 只有一个零点
- 6.(多选题)(2022 山东泰安二模)已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + 1$, $a \in \mathbf{R}$,则下列结论正确的是()
- A.对任意的 $a \in \mathbf{R}$,存在 $x_0 \in (0, +\infty)$,使得 $f(x_0) = 0$
B.若 x_1 是 $f(x)$ 的极值点,则 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减
C.函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1 - \ln(2a)}{2}$
D.若 $f(x)$ 有两个零点,则 $0 < a < \frac{e}{2}$
- 7.(2021 海南二模)函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - 1$ 的零点个数为_____.
- 8.(2021 湖南永州市二模)定义方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x_0 叫作函数 $f(x)$ 的“新驻点”.
- (1)设 $f(x) = \cos x$,则 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的“新驻点”为_____;
- (2)如果函数 $g(x) = e^x - x$ 与 $h(x) = \ln(x + 1)$ 的“新驻点”分别为 α, β ,那么 α 和 β 的大小关系是_____.

9.(2022 江苏南通市二模改编)已知函数 $f(x) = \left|e^x - \frac{a}{x}\right| - a\ln x$.

- (1)当 $a = -1$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2)求证: $a \leq 0$ 时, $f(x) > a$.

10.已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2\ln x}{x} - a$.

- (1)若 $f(x) \geq 0$,求实数 a 的取值范围;
- (2)若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ,证明: $x_1 x_2 < 1$.

11.设函数 $f(x) = \frac{x}{a} - \ln(ax + 1) (a \neq 0)$.

- (1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2)当 $x > 0$ 时,证明: $e^x - e^{\frac{x\sin x}{2}} > x$.