江苏省仪征中学2023届高三数学抢分计划（1）

考试时间：2023 年 5 月 17 日下午 14:00—16:00　　试卷满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．　已知集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，集合 $B=\{x\mid y=\ln(x+1)\}$，则（　　）

A．$A\subseteq \complement_U B$　　B．$\complement_U A\subseteq B$　　C．$(\complement_U A)\cup B=U$　　D．$A\cup B=U$

2．　已知 $2-\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 $b+c=$（　　）

A．9　　B．1　　C．-7　　D．$2\mathrm{i}-5$

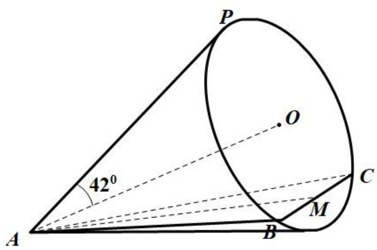
3．　已知向量 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为（　　）

A．$\frac{1}{4}\vec{a}$　　B．$-\frac{1}{4}\vec{a}$　　C．$\frac{1}{8}\vec{a}$　　D．$-\frac{1}{8}\vec{a}$

4．　函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 是偶函数，则 $\tan\varphi=$（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5．　用数学的眼光观察世界，神奇的彩虹角约为 42°．如图，眼睛与彩虹之间可以抽象为一个圆锥，设 AO 是眼睛与彩虹中心的连线，AP 是眼睛与彩虹最高点的连线，则称 $\angle OAP$ 为彩虹角．若平面 ABC 为水平面，BC 为彩虹面与水平面的交线，M 为 BC 的中点，$BC=1200$ 米，$AM=800$ 米，则彩虹（$\overset{\frown}{BPC}$）的长度约为（　　）



（参考数据：$\sin 42^\circ\approx 0.67$，$\sin 1.1\approx\frac{60}{67}$）

A．$(1340\pi-1474)$米　　B．$(1340\pi-670)$米

C．$(2000\pi-1474)$米　　D．$(2000\pi-670)$米

6．　6 名同学相约在周末参加创建全国文明城市志愿活动，现有交通值守、文明劝导、文艺宣讲三种岗位需要志愿者，其中，交通值守、文明劝导岗位各需 2 人，文艺宣讲岗位需 1 人．已知这 6 名同学中有 4 名男生，2 名女生，现要从这 6 名同学中选出 5 人上岗，剩下 1 人留守值班．若两名女生都已经到岗，则她们不在同一岗位的概率为（　　）

A．$\frac{2}{15}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{8}{15}$　　D．$\frac{4}{5}$

7. 设 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 中的较小数. 若函数 $f(x)=\min\left\{|x|-1,2x^2-ax+a+6\right\}$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[12,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,-4]\cup(12,+\infty)$

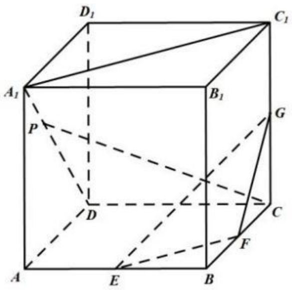
C. $(-\infty,-4)\cup[12,+\infty)$　　　　D. $(-\infty,-4)$

8. 现有一个底面边长为 $2\sqrt{3}$，侧棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正三棱锥框架，其各顶点都在球 O_1 的球面上. 将一个圆气球 O_2 放在此框架内，再向气球内充气，当圆气球恰好与此正三棱锥各棱都相切时停止充气，此时两球表面积之和为（　　）

A. 23π　　B. $(60-16\sqrt{6})\pi$　　C. $(60+16\sqrt{6})\pi$　　D. $(22-2\sqrt{5})\pi$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为 AB，BC，CC_1 的中点，点 P 在线段 A_1D 上，则下列结论正确的是（　　）



A. 直线 A_1C_1 // 平面 EFG

B. 直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角为定值

C. 异面直线 CP 和 FG 所成的角不为定值

D. 若直线 CP // 平面 EFG，则点 P 为线段 A_1D 的中点

10. 已知 $a>1$，$b>1$，$\dfrac{a}{a-1}=2^a$，$\dfrac{b}{b-1}=\log_2 b$，则以下结论正确的是（　　）

A. $a+2^a=b+\log_2 b$　　　　B. $\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{\log_2 b}=1$

C. $a-b<-2$　　　　D. $a+b>4$

11. 双曲线具有如下光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左，右焦点，过 C 右支上一点 $A(x_0,y_0)$ $(x_0>1)$ 作直线 l 交 x 轴于点 $M\left(\dfrac{1}{x_0},0\right)$，交 y 轴于点 N，则（　　）

A. C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$

B. $\angle F_1AM=\angle F_2AM$

C. 过点 F_1 作 $F_1H\perp AM$，垂足为 H，则 $|OH|=\dfrac{3}{2}$

D. 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$

12．已知函数 $f_n(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $f_n(x)$ 的最小值为 a_n，下列说法正确的是（　　）

A．对任意的正整数 n，$f_n(x)$ 的图象都关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

B．$a_1+a_2+a_3=\dfrac{7}{8}$

C．$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+a_i)<2$

D．设 $b_n=\sqrt{n}\cdot a_n$，S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_n<2\sqrt{2}-4b_{n+2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．某工厂生产一批零件（单位：cm），其尺寸 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(\xi\leqslant 14)=0.1$，$P(\xi<18)=0.9$，则 $\mu=$________.

14．已知直线 $y=kx$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 相交于 A、B 两点．若 ΔABC 为直角三角形，则 k 的值为________.

15．已知函数 $f(x)=|\ln x|$，直线 l_1，l_2 是 $f(x)$ 的两条切线，l_1，l_2 相交于点 Q，若 $l_1\perp l_2$，则 Q 点横坐标的取值范围是________.

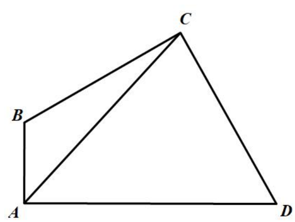
16．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，A,B 是椭圆 C 上的两点，且直线 OA,OB 的斜率满足 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{4}$，延长 OA 到点 M，使得 $|OM|=3|OA|$，且直线 MB 交椭圆 C 于 N 点，设 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda^2+\mu^2=$________；$\dfrac{|MN|}{|BN|}=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$\angle ABC=\dfrac{2}{3}\pi$，$AB=1$．

（1）若 $AC=\sqrt{7}$，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$CD=2\sqrt{3}$，求 $\tan\angle CAD$．



18．（12 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n^2+2a_n-n=2S_n$．

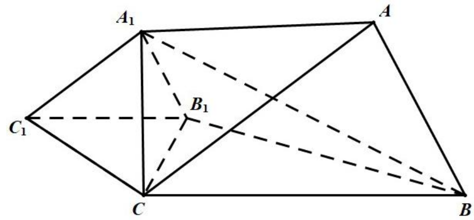
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=3^{a_n}-1$，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\dfrac{b_n+1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，求证：$c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{4}$．

19．（12分）如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C．

（1）证明：平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）若 $A_1C=B_1C$，$A_1B_1=B_1C_1=2\sqrt{2}$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，求平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值．



20．（12分）2023年中央一号文件指出，民族要复兴，乡村必振兴．为助力乡村振兴，某电商平台准备为某地的农副特色产品开设直播带货专场．直播前，此平台用不同的单价试销，并在购买的顾客中进行体验调查问卷．为了回馈100名热心参与问卷的顾客，此平台决定在直播中专门为他们设置两次抽奖活动，每次抽奖都是由系统独立、随机地从这100名顾客中抽取20名顾客，抽中顾客会有礼品赠送，若直播时这100名顾客都在线，记两次抽中的顾客总人数为 X（不重复计数）．

（1）若甲是这100名顾客中的一人，求甲被抽中的概率；

（2）求使 $P(X=k)$ 取得最大值的整数 k．

21．（12分）已知动圆过点 $F(0,1)$，且与直线 $l:y=-1$ 相切，设动圆圆心 D 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）过 l 上一点 P 作曲线 C 的两条切线 PA，PB，A，B 为切点，PA，PB 与 x 轴分别交于 M，N 两点．记 $\Delta AFM,\Delta PMN,\Delta BFN$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3．

（i）证明：四边形 $FNPM$ 为平行四边形；

（ii）求 $\dfrac{S_2^2}{S_1S_3}$ 的值．

22．（12分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-1$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax-\dfrac{1}{2}$，其中 $a>0$，e是自然对数的底数．

（1）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，在（1）的条件下，讨论关于 x 的方程 $h(f(x))=h(g(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上解的个数．

江苏省仪征中学2023届高三数学抢分计划（1）
参考答案

选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	C	A	D	A	B	AD	ABD	ABD	ACD

填空题

13．16　　14．$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$　　15．$(0,1)$　　16．1；4

小题详解

1．C【解析】$\because A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid y=\ln(x+1)\}=\{x\mid x>-1\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -1\}$，$\therefore A\not\subseteq \complement_U B$，$\complement_U A\not\subseteq B$，$A\cup B\neq U$，$(\complement_U A)\cup B=U$，

故选 C.

2．B【解析】已知 $2-\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的一个根，

则 $(2-\mathrm{i})^2+b(2-\mathrm{i})+c=0$，即 $4-4\mathrm{i}-1+2b-b\mathrm{i}+c=0$，即 $\begin{cases}3+2b+c=0\\-4-b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-4\\c=5\end{cases}$，

故 $b+c=1$，故选 B.

3．D【解析】$\because |\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$，

$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\bullet\vec{b}+4\vec{b}^2=10$，即 $4-4\vec{a}\bullet\vec{b}+4=10$，$\vec{a}\bullet\vec{b}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=-\frac{1}{8}\vec{a}$，故选 D.

4．C【解析】函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得 $g(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)$ 的图象，

又函数 $g(x)$ 是偶函数，$\therefore \frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，($k\in\mathbf{Z}$)，$\therefore \varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$；$\therefore \tan\varphi=\tan(k\pi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选 C.

5．A【解析】在 $\triangle AMB$ 中，由勾股定理可得：$AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{800^2+600^2}=1000$ 米，连接 PO，

则在$\triangle APO$中，$PO = AP \cdot \sin 42° \approx 670$米，连接$OB$，$OC$，$OM$，则在$\triangle OBM$中，$\sin\angle BOM = \frac{BM}{BO} = \frac{600}{670} = \frac{60}{67}$，故$\angle BOM \approx 1.1$，$\angle BOC \approx 2.2$，则彩虹（$\overset{\frown}{BPC}$）的长度约为$(2\pi - 2.2)\times 670 = 1340\pi - 1474$，故选A．

6．D【解析】法一：设“两名女生都到岗”为事件A，“两名女生不在同一岗位”为事件B，则

$P(A) = \frac{C_2^2C_4^3C_5^1C_4^2C_2^2}{C_6^5C_5^1C_4^2C_2^2} = \frac{4\times5\times6}{6\times5\times6} = \frac{2}{3}$，$P(AB) = \frac{C_2^2C_4^3(C_5^1C_4^2C_2^2 - C_2^1C_3^1)}{C_6^5C_5^1C_4^2C_2^2} = \frac{4\times24}{6\times5\times6} = \frac{8}{15}$，

$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{8}{15}\times\frac{3}{2} = \frac{4}{5}$，故选D．

法二：$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{C_2^2C_4^3(C_5^1C_4^2C_2^2 - C_2^1C_3^1)}{C_2^2C_4^3C_5^1C_4^2C_2^2} = \frac{C_5^1C_4^2C_2^2 - C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^2C_2^2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$．

7．A【解析】由题意可得$g(x) = 2x^2 - ax + a + 6 = 0$有解，所以$\Delta = a^2 - 8(a+6) \geqslant 0$，

解得$a \leqslant -4$或$a \geqslant 12$，

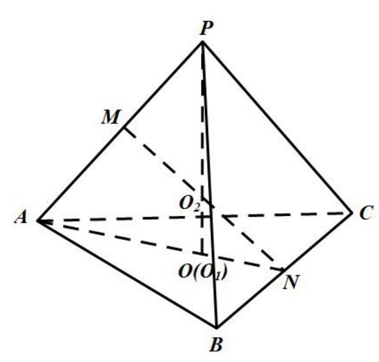
当$a \geqslant 12$时，必有$\begin{cases}\frac{a}{4} > 1\\ g(1) = 2 - a + a + 6 \geqslant 0\end{cases}$，解得$a \geqslant 12$；

当$a \leqslant -4$时，必有$\begin{cases}\frac{a}{4} < -1\\ g(-1) = 2a + 8 \geqslant 0\end{cases}$，不等式组无解，

综上所述，$a \geqslant 12$，$\therefore a$的取值范围为$[12, +\infty)$，故选A．

8．B【解析】设此正三棱锥框架为$P-ABC$，球O_1的半径为R，球O_2的半径为r，底面ABC外接圆的圆心为O，连接PO，AO，延长AO交BC于点N．$\because$圆气球O_2在此框架内且与正三棱锥所有的棱都相切，设球O_2与棱PA和BC相切于点M，N，则$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3} = 2$，$ON = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3} - 2 = 1$，

$\because PO \perp$底面ABC，$\therefore PO \perp AO$，又$\because PA = 2\sqrt{2}$，$\therefore PO = \sqrt{8-4} = 2$，



在直角三角形OO_2N中，$OO_2 = \sqrt{r^2 - 1}$，$1 < r < 2\sqrt{2}$，

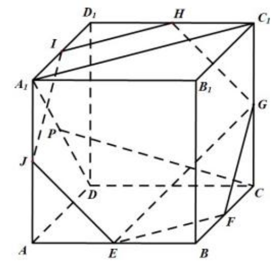
在直角三角形PMO_2中，$PM = MO_2 = r$，$PO_2 = \sqrt{2}r$，

由$PO = PO_2 + OO_2$，可得$2 = \sqrt{2}r + \sqrt{r^2 - 1}$，解得$r = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$，

则球O_2的表面积为$4\pi r^2 = 4\pi \times (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (44 - 16\sqrt{6})\pi$，

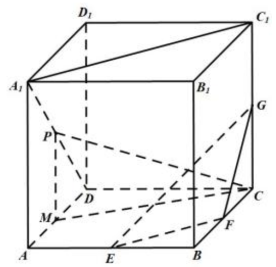
又$OA = OB = OC = OP = 2$，则O与O_1重合，球O_1的半径$R = 2$，球O_1的表面积为

$4\pi R^2=4\pi\times 2^2=16\pi$，综上可得：两球表面积之和为$(44-16\sqrt{6})\pi+16\pi=(60-16\sqrt{6})\pi$，故选 B.



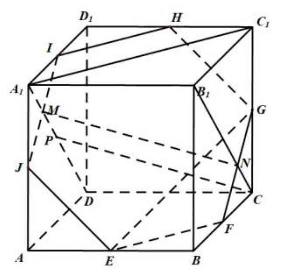
9．AD【解析】对于 A 选项，平面 EFG 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面图形为正六边形 $EFGHIJ$，其中 H,I,J 分别为 C_1D_1，A_1D_1，AA_1 的中点，$\because A_1C_1\,//\,HI$，$HI\subset$平面 $EFGHIJ$，$A_1C_1\not\subset$平面 $EFGHIJ$，$\therefore\ A_1C_1\,//$平面 $EFGHIJ$，故 A 正确；

对于 B 选项，过 P 作 $PM\perp AD$ 交 AD 于点 M，则直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PCM$，$\tan\angle PCM=\dfrac{PM}{CM}$，设 $PM=x$，正方体的棱长为 1，



则 $\tan\angle PCM=\dfrac{PM}{CM}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2+1}}$，（$0\leqslant x\leqslant 1$），

$\therefore\ \tan\angle PCM\in\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，$\therefore$直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角不为定值，故 B 错误；



对于 C 选项，$\because\ BC_1\perp$平面 A_1B_1CD，$BC_1\,//\,FG$，$\therefore\ FG\perp$平面 A_1B_1CD，

又 $CP\subset$平面 A_1B_1CD，$\therefore CP\perp FG$，故 C 错误；

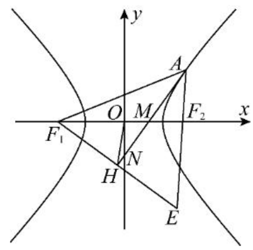
对于 D 选项，设 $IJ\cap A_1D=M$，$FG\cap B_1C=N$，则平面 $A_1B_1CD\cap$平面 $EFGHIJ=MN$，$\because\ CP\,//$平面 EFG，$CP\subset$平面 A_1B_1CD，$\therefore\ CP\,//\,MN$，又在平面 A_1B_1CD 内，易知 $A_1M=\dfrac{1}{4}A_1D$，$CN=\dfrac{1}{4}CB_1$，$\therefore$点 P 为线段 A_1D 的中点，故 D 正确，故选 AD.

10．ABD【解析】对于 A 选项，由题意知，a,b 是函数 $h(x)=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ 分别与函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ 图象交点的横坐标，$\because\ f(x)$，$g(x)$ 两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，$h(x)$ 的图象也关于 $y=x$ 对称，故两交点 $(a,2^a)$，$(b,\log_2 b)$ 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $a=\log_2 b$，$b=2^a$，故 A 正确；对于 B 选项，由 $\dfrac{a}{a-1}=2^a=b$ 可得 $ab=a+b$ 即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，故 B 正确；对于 D 选项，

$\because\ a+b=(a+b)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>4$，故 D 正确；对于 C 选项，$a-b=\log_2 b-b(2<b<4)$，令

$\varphi(b)=\log_2 b-b$，则 $\varphi'(b)=\dfrac{1}{b\ln 2}-1<0$，$\therefore \varphi(b)=\log_2 b-b$ 在 $(2,4)$ 上单调递减，则 $\varphi(b)>\log_2 4-4=-2$，故 C 错误，故选 ABD．

11．ABD【解析】对于 A 选项，由已知可得 $a=1,b=2$，$\therefore C$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，故 A 正确；对于 B 选项，由题意得，AM 的直线方程为：$x_0x-\dfrac{y_0y}{4}=1$，$\therefore AM$ 为双曲线的切线，由双曲线的光学性质可知，AM 平分 $\angle F_1AF_2$，故 B 正确；对于 C 选项，延长 F_1H，与 AF_2 的延长线交于点 E，则 AH 垂直平分 F_1E，即点 H 为 F_1E 的中点．又 O 是 F_1F_2 的中点，



$\therefore |OH|=\dfrac{1}{2}|F_2E|=\dfrac{1}{2}\left(|AE|-|AF_2|\right)=\dfrac{1}{2}\left(|AF_1|-|AF_2|\right)=a=1$，故 C 错误；

对于 D 选项，

$$S_{AF_1NF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle NF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times\left(|y_0|+\frac{4}{|y_0|}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{|y_0|\cdot\frac{4}{|y_0|}}=4\sqrt{5},$$

当且仅当 $|y_0|=\dfrac{4}{|y_0|}$，即 $y_0=\pm 2$ 时，等号成立．$\therefore$ 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$，故 D 正确，故选 ABD．

12．ACD【解析】对于 A 选项，$\because f_n(\dfrac{\pi}{2}-x)=\sin^{2n}(\dfrac{\pi}{2}-x)+\cos^{2n}(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cos^{2n}x+\sin^{2n}x=f_n(x)$，故 A 正确；对于 B 选项，当 $n=1$ 时，$f_1(x)=1$．当 $n>1$ 时，设 $\sin^2 x=t$，则 $\cos^2 x=1-t$，令 $h(t)=t^n+(1-t)^n,t\in[0,1]$，$h'(t)=nt^{n-1}-n(1-t)^{n-1}=n\left[t^{n-1}-(1-t)^{n-1}\right]$，$0<t<\dfrac{1}{2}$ 时，$0<t<1-t<1$，

$\therefore t^{n-1}<(1-t)^{n-1}$，$\therefore h'(t)<0$，$\dfrac{1}{2}<t<1$ 时，$h'(t)>0$，$\therefore h(t)_{\min}=h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

$\therefore a_1+a_2+a_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$，故 B 错误；对于 C 选项，由 $\ln(x+1)\leqslant x$ 得 $\ln(1+a_i)<a_i$，

$\therefore \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(1+a_i)<\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$，故 C 正确；

对于 D 选项，$\because \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$，$\therefore 2\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{n+1}}{2^{n-1}}>\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}<\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n-2}}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$，又 $b_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$，

$\therefore S_n=\dfrac{\sqrt{1}}{2^{1-1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2-1}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1-2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2^{1-1}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2^0}-\dfrac{\sqrt{4}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n-2}}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$

$=2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{n+2}}{2^{n+1}}=2\sqrt{2}-4b_{n+2}$，即有 $S_n<2\sqrt{2}-4b_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，故 D 正确，故选 ACD．

13．16【解析】$\because\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(\xi\leqslant 14)+P(\xi<18)=0.1+0.9=1$，

$\therefore P(\xi\leqslant 14)=1-P(\xi<18)=P(\xi\geqslant 18)$，$\therefore\mu=\frac{14+18}{2}=16$．

14．$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$【解析】根据题意，圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 即 $(x-2)^2+y^2=1$，若 ΔABC 为直角三角形，

则有 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得：$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$．

15．$(0,1)$【解析】记 $g(x)=-\ln x(0<x<1)$，$h(x)=\ln x(x\geqslant 1)$，

由函数 $f(x)$ 图象可知，不妨设 l_1 与 $g(x)$ 相切于点 $A(x_1,-\ln x_1)$，l_2 与 $h(x)=\ln x$ 相切于点 $B(x_2,\ln x_2)$，

则 $0<x_1<1,x_2>1$．$\because g'(x)=-\frac{1}{x}$，$h'(x)=\frac{1}{x}$，$\therefore k_{l_1}=-\frac{1}{x_1}$，$k_{l_2}=\frac{1}{x_2}$，

$\because l_1\perp l_2$，$\therefore -\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$，即 $x_1x_2=1$，$\because l_1$ 的方程为：$y+\ln x_1=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，

l_2 的方程为：$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，联立方程组可求得点 Q 的横坐标 $x_Q=\frac{2}{x_1+x_2}$，

$\because x_1x_2=1$，$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，$\therefore 0<x_Q<1$，即 Q 点横坐标的取值范围是 $(0,1)$．

16．1；4【解析】设 $N(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{4}$，$\therefore x_1x_2+4y_1y_2=0$，

$\because\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$\therefore(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$，$\therefore\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2\\y=\lambda y_1+\mu y_2\end{cases}$，

$\because N(x,y)$ 在椭圆上，$\therefore(\lambda x_1+\mu x_2)^2+4(\lambda y_1+\mu y_2)^2=4$．

即 $\lambda^2(x_1^2+4y_1^2)+\mu^2(x_2^2+4y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+4y_1y_2)=4$．①

又 $x_1^2+4y_1^2=4$，$x_2^2+4y_2^2=4$，代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1$．

$\because\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{OM}+\mu\overrightarrow{OB}$，由 M,N,B 三点共线，得 $\frac{\lambda}{3}+\mu=1$，$\therefore\lambda=\frac{3}{5}$，$\mu=\frac{4}{5}$，

$\therefore\overrightarrow{ON}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OM}+\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$，$\therefore\frac{1}{5}\overrightarrow{MN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{NB}$，$\therefore\frac{|MN|}{|BN|}=4$．

解答题

17．（10 分）

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】（1）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\angle ABC$，

$\therefore 7 = 1 + BC^2 + BC$，解得 $BC = 2$，

$\therefore S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle ABC = \dfrac{1}{2}\times 1\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ················5 分

（2）设 $\angle CAD = \theta$，

在 ΔACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC} = \dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，$\therefore \dfrac{AC}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$ ①， ················6 分

在 ΔABC 中，$\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \theta$，$\angle BCA = \theta - \dfrac{\pi}{6}$，

则 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$，即 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{\sin(\theta - \dfrac{\pi}{6})}$ ②， ··············· 8 分

由①②得：$2\sqrt{3}\sin(\theta - \dfrac{\pi}{6}) = \sin\theta, \therefore 2\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta) = \sin\theta$，

整理得 $2\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$，$\therefore \tan\angle CAD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ················10 分

18．（12 分）

【答案】（1）$a_n = n$；（2）证明见解析

【解析】（1）$\because a_n^2 + 2a_n - n = 2S_n$，当 $n \geqslant 2$ 时，$a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - (n-1) = 2S_{n-1}$，

两式相减得：$a_n^2 + 2a_n - a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} - 1 = 2a_n$，整理得 $a_n^2 = (a_{n-1}+1)^2$， ················4 分

$\because a_n > 0$，$\therefore a_n = a_{n-1} + 1$（$n \geqslant 2$），当 $n = 1$ 时，$a_1^2 + 2a_1 - 1 = 2a_1$，

$\therefore a_1 = -1$（舍）或 $a_1 = 1$， ··············· 5 分

$\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，则 $a_n = n$； ················ 6 分

（2）由（1）知，$b_n = 3^n - 1$，$c_n = \dfrac{3^n}{(3^n - 1)\cdot(3^{n+1} - 1)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3^n - 1} - \dfrac{1}{3^{n+1} - 1})$ ··············· 8 分

$\therefore c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3^1 - 1} - \dfrac{1}{3^2 - 1} + \dfrac{1}{3^2 - 1} - \dfrac{1}{3^3 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{3^n - 1} - \dfrac{1}{3^{n+1} - 1})$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3^{n+1} - 1}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(3^{n+1} - 1)}$，

$\because \dfrac{1}{2(3^{n+1}-1)}>0$，$\therefore \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(3^{n+1}-1)}<\dfrac{1}{4}$，即 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{4}$． ………………12 分

19．（12 分）

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$

【解析】（1）证明：$\because A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，$B_1C_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore A_1C\perp B_1C_1$；

又 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \angle A_1B_1C_1=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B_1C_1\perp B_1A_1$， ………………2 分

$\because A_1C\perp B_1C_1$，$B_1C_1\perp B_1A_1$，$A_1C\cap B_1A_1=A_1$，$A_1C,B_1A_1\subset$ 平面 A_1B_1C，

$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C， ………………4 分

又 $B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore$ 平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$； ………………5 分

（2）$\because A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，$B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore A_1C\perp B_1C$；

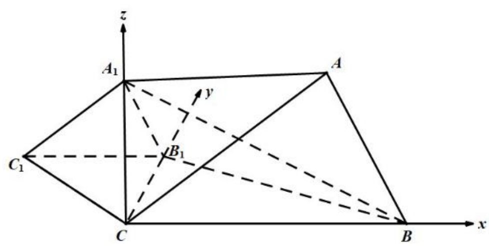
又 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C，$B_1C_1 // BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 A_1B_1C，$\because B_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，$\therefore BC\perp B_1C$，

$\because A_1C\perp B_1C$，$BC\perp B_1C$，$A_1C\cap BC=C$，$A_1C,BC\subset$ 平面 A_1BC，

$\therefore B_1C\perp$ 平面 A_1BC， ………………6 分

法一：（坐标法）

分别以 $\overrightarrow{CB}$ 为 x 轴，$\overrightarrow{CB_1}$ 为 y 轴，$\overrightarrow{CA_1}$ 为 z 轴建立如图所示平面直角坐标系，



则 $A_1(0,0,2)$，$B(4\sqrt{2},0,0)$，$C(0,0,0)$，$B_1(0,2,0)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(4\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{B_1B}=(4\sqrt{2},-2,0)$， ………………7 分

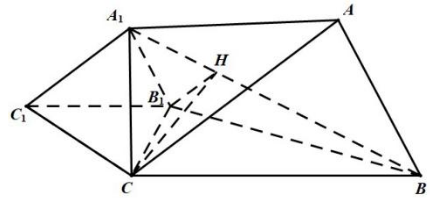
设平面 AA_1B 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，$\because B_1B\subset$ 平面 AA_1B，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4\sqrt{2}x-2z=0\\ 4\sqrt{2}x-2y=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},4,4)$， ………………9 分

取平面 CA_1B 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$， ………………10 分

则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{4}{\sqrt{34}\cdot 1}=\dfrac{4\sqrt{34}}{34}=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$，

故平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$． ………………… 12 分



法二：（几何法）

在平面 A_1BC 内，过点 C 作 $CH\perp A_1B$ 交 A_1B 于点 H，

连接 B_1H，则 $A_1B\perp$ 平面 B_1CH，$\angle B_1HC$ 为二面角 B_1-A_1B-C 的平面角，

即为平面 AA_1B 与平面 CA_1B 的夹角． ……………… 8 分

$\because$ $A_1C=B_1C$，$A_1B_1=B_1C_1=2\sqrt{2}$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，$\therefore$ $A_1C=B_1C=2$，

又在直角三角形 A_1BC 中，$A_1B=\sqrt{A_1C^2+BC^2}=\sqrt{4+32}=6$，$\therefore$ $CH=\dfrac{A_1C\cdot BC}{A_1B}=\dfrac{2\cdot 4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

则在直角三角形 B_1CH 中，$\tan\angle B_1HC=\dfrac{B_1C}{CH}=\dfrac{2}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，故 $\cos\angle B_1HC=\dfrac{4}{\sqrt{34}}=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$，

$\therefore$ 平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$． …………………12 分

20．（12 分）

【答案】（1）$\dfrac{9}{25}$；（2）$k=36$

【解析】（1）设事件 A：“顾客甲第一次抽中”，事件 B：“顾客甲第二次抽中”，

$\because$ A 与 B 是相互独立事件，所以 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立，

由于 $P(A)=P(B)=\dfrac{C_{99}^{19}}{C_{100}^{20}}=\dfrac{\frac{99!}{19!80!}}{\frac{100!}{20!80!}}=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$，故 $P(\overline{A})=P(\overline{B})=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore$ 甲被抽中的概率 $P=1-(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{9}{25}$； ………………… 4 分

（2）“由系统独立、随机地从这 100 名顾客中抽取 20 名顾客，抽取两次”所包含的基本事件总数

为 $(C_{100}^{20})^2$，当 $X=k$ 时，两次都中奖的人数为 $40-k$，只在第一次中奖的顾客人数为 $k-20$，只在第二次中奖的顾客人数也为 $k-20$，

由乘法原理知：事件 $\{X=k\}$ 所包含的基本事件数为 $C_{100}^{20}C_{20}^{40-k}C_{80}^{k-20}=C_{100}^{20}C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}$，

$P(X=k)=\dfrac{C_{100}^{20}C_{20}^{40-k}C_{80}^{k-20}}{(C_{100}^{20})^2}=\dfrac{C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}}{C_{100}^{20}}$， $20\leqslant k\leqslant 40$， ………………… 6 分

由 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1)\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1)\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}\geqslant C_{20}^{k-19}C_{80}^{k-19}\\C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}\geqslant C_{20}^{k-21}C_{80}^{k-21}\end{cases}$， ………………… 8 分

整理得：$\begin{cases}\dfrac{20!}{(k-20)!(40-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-20)!(100-k)!}\geqslant\dfrac{20!}{(k-19)!(39-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-19)!(99-k)!}\\\dfrac{20!}{(k-20)!(40-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-20)!(100-k)!}\geqslant\dfrac{20!}{(k-21)!(41-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-21)!(101-k)!}\end{cases}$，

化简得：$\begin{cases}\dfrac{1}{(40-k)(100-k)}\geqslant\dfrac{1}{(k-19)(k-19)}\\\dfrac{1}{(k-20)(k-20)}\geqslant\dfrac{1}{(41-k)(101-k)}\end{cases}$，则有 $\begin{cases}(k-19)(k-19)\geqslant(40-k)(100-k)\\(41-k)(101-k)\geqslant(k-20)(k-20)\end{cases}$，

整理得 $\begin{cases}102k\geqslant 3639\\102k\leqslant 3741\end{cases}$，解得 $\dfrac{1213}{34}\leqslant k\leqslant\dfrac{1247}{34}$，即 $35\dfrac{23}{34}\leqslant k\leqslant 36\dfrac{23}{34}$， ………………… 11 分

$\because$ k 为整数，$\therefore$ $k=36$，$\therefore$ $P(X=k)$ 取到最大值时， $k=36$． ………………… 12 分

21．（12 分）

【答案】（1） $x^2=4y$；（2）（i）证明见解析；（ii）1

【解析】（1）设圆心 $D(x,y)$，由题意得：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，化简整理得：$x^2=4y$，

$\therefore$ 曲线 C 的方程为：$x^2=4y$． ………………… 4 分

（2）（i）证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\because$ $y=\dfrac{x^2}{4}$，$\therefore$ $y'=\dfrac{x}{2}$，

$\therefore$ 直线 PA 的方程为： $y=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)+y_1$，即 $y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2$，

同理可得直线 PB 的方程为：$y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$，

$\therefore M\left(\frac{x_1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{x_2}{2},0\right)$，$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},-1\right)$， ………………6 分

又 $F(0,1)$，$\therefore \overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}=\left(\frac{x_1}{2},-1\right)+\left(\frac{x_2}{2},-1\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)=\overrightarrow{FP}$，

$\therefore$ 四边形 $FNPM$ 为平行四边形； ………………8 分

（ii）$\because P$ 在直线 PA，PB 上，设 $P(x_0,-1)$，由(i)得：$\begin{cases}x_1x_0=2(-1+y_1)\\x_2x_0=2(-1+y_2)\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AB 的方程为：$x_0x-2y+2=0$，$\therefore$ 直线 AB 过点 $F(0,1)$，

$\because$ 四边形 $FNPM$ 为平行四边形，$\therefore FM \parallel BP$，$FN \parallel AP$，

$\therefore \angle AMF=\angle MPN=\angle BNF$，$FN=PM$，$PN=MF$，$\frac{BN}{NP}=\frac{BF}{FA}=\frac{MP}{MA}$，

$\therefore MP\cdot NP=MA\cdot BN$， ………………10 分

$\because S_1=\frac{1}{2}|MA||MF|\sin\angle AMF$，$S_2=\frac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN$，$S_3=\frac{1}{2}|NB||NF|\sin\angle BNF$，

$\therefore \frac{S_2^2}{S_1S_3}=\frac{(|PM|\cdot|PN|)^2}{|MA|\cdot|MF|\cdot|NB|\cdot|NF|}=\frac{|PM|\cdot|PN|}{|MA|\cdot|NB|}=1.$ ………………12 分

22．（12 分）

【答案】(1) $0<a\leqslant e$；(2) $0<a\leqslant e$ 时，关于 x 的方程 $h(f(x))=h(g(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解.

【解析】（1）由题意，$e^x+x-1\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}$，即 $a\leqslant\frac{e^x-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}}{x}$，

令 $\varphi(x)=\frac{e^x-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}}{x}$，$\varphi'(x)=\frac{(x-1)(e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})}{x^2}$， ………………2 分

由 $e^x\geqslant x+1$ 知 $e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}>0$，

故当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，$x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e$，所以 $0<a\leqslant e$. ………………4 分

（2）$h(x)=\frac{\ln x}{x}$，易求得 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减；

①当 $a=e$ 时，$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ex-\frac{1}{2}$，且由（1）知 $f(x)\geqslant g(x)$，$g'(x)=x+e>0$，$f'(x)=e^x+1>0$，

即 $f(x)$，$g(x)$ 均单调递增；此时 $f(1)=g(1)=e$，有 $h(f(1))=h(g(1))$．

1°当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<f(x)<f(1)=e$，$h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，所以 $h(f(x))>h(g(x))$；

2° 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)>g(1)=\mathrm{e}$，$h(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(f(x))<h(g(x))$；

所以 $a=\mathrm{e}$ 时，方程有唯一解. ………………7 分

②当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，由（1）知 $f(x)>g(x)$，令 $f(x)=\mathrm{e}$ 得 $x=1$，

令 $g(x)=\mathrm{e}$ 得 $\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}=\mathrm{e}\Rightarrow x_0=\sqrt{a^2+2\mathrm{e}+1}-a>1$，

1° 当 $x\in(0,1]$ 时，$g(x)<f(x)\leqslant f(1)=\mathrm{e}$，则 $h(f(x))>h(g(x))$； ………………8 分

2° 当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f(x)>\mathrm{e}>g(x)$，由复合函数单调性可知 $h(f(x))$ 单调递减，$h(g(x))$ 单调递增，

令 $m(x)=h(g(x))-h(f(x))$，则 $m(x)$ 单调递增，

又 $m(1)=h(g(1))-h(f(1))=h(a)-h(\mathrm{e})<0$，$m(x_0)=h(g(x_0))-h(f(x_0))=h(\mathrm{e})-h(f(x_0))>0$，

所以存在唯一的 $x\in(1,x_0)$，满足 $h(f(x))=h(g(x))$； ………………10 分

3° 当 $x\in[x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)\geqslant g(x_0)=\mathrm{e}$，则 $h(f(x))<h(g(x))$；

所以 $0<a<\mathrm{e}$ 时，方程有唯一解. ………………11 分

综合①②可得：

当 $0<a\leqslant\mathrm{e}$ 时，关于 x 的方程 $h(f(x))=h(g(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解. ………………12 分

题号	题型	分值	考点（知识点）	能力点	难易度	试题来源
1	单选	5	集合的运算、集合的关系	数学运算	易	自创
2	单选	5	复数的概念与运算	数学运算	易	改编
3	单选	5	平面向量的数量积、投影向量	数学运算	易	自创
4	单选	5	三角函数的图象与性质	数学运算	易	改编
5	单选	5	空间几何体的结构	直观想象	易	改编
6	单选	5	条件概率、计数原理	数学建模	中	自创
7	单选	5	分段函数的零点	数学运算	中	改编
8	单选	5	球与几何体的切接	直观想象	中	改编
9	多选	5	立体几何综合	直观想象	易	自创
10	多选	5	函数与方程、导数与不等式	数学抽象 数学运算	中	改编
11	多选	5	双曲线的几何性质	数学运算	中	改编
12	多选	5	导数与三角函数、导数与数列	逻辑推理 数学运算	难	改编
13	填空	5	正态分布	数学运算	易	自创
14	填空	5	直线与圆的位置关系	数学运算	易	改编
15	填空	5	导数的几何意义	数学运算	中	改编
16	填空	5	直线与椭圆的位置关系、向量共线	逻辑推理 数据处理	难	自创
17	解答	10	解三角形、三角恒等变换	数学运算	易	改编
18	解答	12	数列递推式、数列求和	数学运算	易	自创
19	解答	12	立体几何与空间向量	直观想象	中	改编
20	解答	12	概率的性质、古典概型、计数原理	数学建模 数据处理	难	自创
21	解答	12	直线与抛物线综合	数学运算	中	自创
22	解答	12	导数与恒成立问题、导数与复合方程的根	逻辑推理 数学运算	难	自创