单选题和多选题的答题技巧

【命题规律】

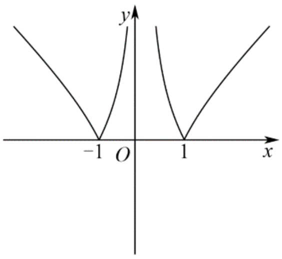
高考的单选题和多选题绝大部分属于中档题目，通常按照由易到难的顺序排列，每道题目一般是多个知识点的小型综合，其中不乏渗透各种数学的思想和方法，基本上能够做到充分考查灵活应用基础知识解决数学问题的能力.

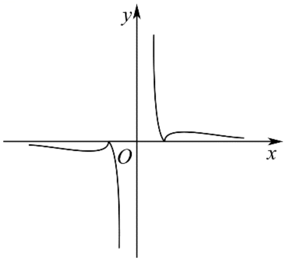
（1）基本策略：单选题和多选题属于“小灵通”题，其解题过程可以说是“不讲道理”，所以其解题的基本策略是充分利用题干所提供的信息作出判断和分析，先定性后定量，先特殊后一般，先间接后直接，尤其是对选择题可以先进行排除，缩小选项数量后再验证求解.

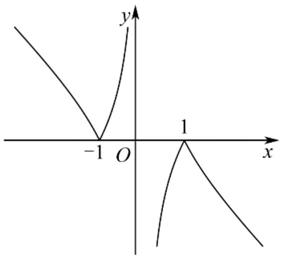
（2）常用方法：单选题和多选题也属“小”题，解题的原则是“小”题巧解，“小”题快解，“小”题解准．求解的方法主要分为直接法和间接法两大类，具体有：直接法，特值法，图解法，构造法，估算法，对选择题还有排除法（筛选法）等.

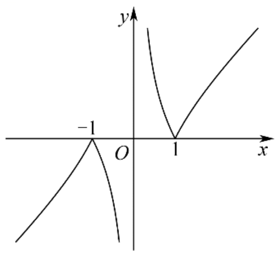
【真题回归】

1．（2022·天津·统考高考真题）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的图像为（　　）


A


B


C


D

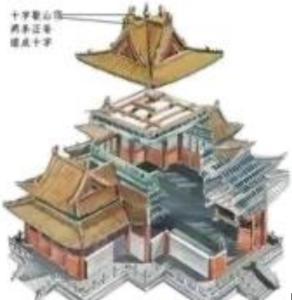
2．（2022·天津·统考高考真题）如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为$120°$，腰为 3 的等腰三角形，则该几何体的体积为（　　）

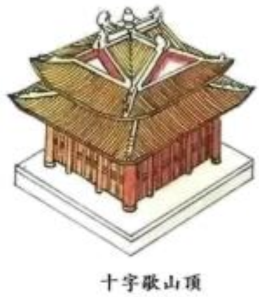
A．23

B．24

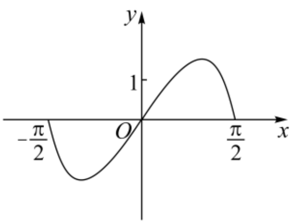
C．26

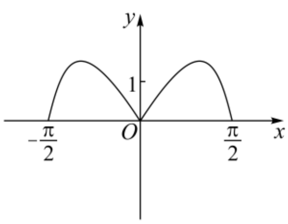
D．27

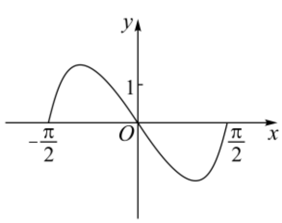


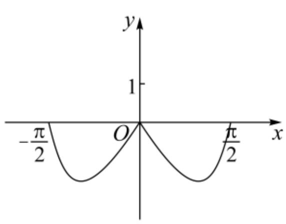


3．（2022·全国·统考高考真题）函数 $y=\left(3^x-3^{-x}\right)\cos x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为（　　）


A


B


C


D

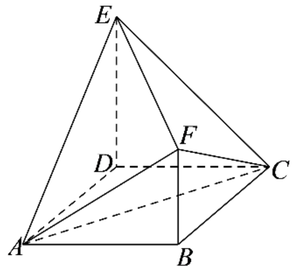
4．（2022·北京·统考高考真题）若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A．40　　B．41　　C．-40　　D．-41

5．**（多选）**（2022·全国·统考高考真题）若 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A．$x+y\le 1$　　B．$x+y\ge -2$　　C．$x^2+y^2\le 2$　　D．$x^2+y^2\ge 1$

6．**（多选）**（2022·全国·统考高考真题）如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD$，$FB// ED, AB=ED=2FB$，记三棱锥$E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$的体积分别为V_1,V_2,V_3，则（　）



A．$V_3=2V_2$

B．$V_3=V_1$

C．$V_3=V_1+V_2$

D．$2V_3=3V_1$

7．**（多选）**（2022·全国·统考高考真题）双曲线C的两个焦点为F_1,F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{17}}{2}$

8．**（多选）**（2022·全国·统考高考真题）已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）

A．$f(0)=0$　　B．$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　C．$f(-1)=f(4)$　　D．$g(-1)=g(2)$

【方法技巧与总结】

1、排除法也叫筛选法或淘汰法，使用排除法的前提条件是答案唯一，具体的做法是采用简捷有效的手段对各个备选答案进行“筛选”，将其中与题干相矛盾的干扰支逐一排除，从而获得正确结论．

2、特殊值法：从题干（或选项）出发，通过选取特殊情况代入，将问题特殊化或构造满足题设条件的特殊函数或图形位置，进行判断．特值法是“小题小做”的重要策略，要注意在怎样的情况下才可使用，特殊情况可能是：特殊值、特殊点、特殊位置、特殊数列等．

3、图解法：对于一些含有几何背景的题，若能根据题目中的条件，作出符合题意的图形，并通过对图形的直观分析、判断，即可快速得出正确结果．这类问题的几何意义一般较为明显，如一次函数的斜率和截距、向量的夹角、解析几何中两点间距离等．

4、构造法是一种创造性思维，是综合运用各种知识和方法，依据问题给出的条件和结论给出的信息，把问题作适当的加工处理，构造与问题相关的数学模型，揭示问题的本质，从而找到解题的方法

5、估算法：由于选择题提供了唯一正确的选项，解答又无需过程．因此，有些题目，不必进行准确的计算，只需对其数值特点和取值界限作出适当的估计，便能作出正确的判断，这就是估算法．估算法往往可以减少运算量．

6、检验法：将选项分别代人题设中或将题设代人选项中逐一检验，确定正确选项．

【核心考点】

核心考点一：直接法

例 1．（2022 春·贵州贵阳·高三统考期中）基本再生数R_0与世代间隔T是新冠肺炎的流行病学基本参数．基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间．在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=\mathrm{e}^{rt}$描述累计感染病例数$I(t)$随时间t（单位：天）的变化规律，指数增长率r与R_0，T近似满足$R_0=1+rT$．有学者基于已有数据估计出$R_0=3.28$，$T=6$．据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 3 倍需要的时间约为（$\ln 2\approx 0.69$）（　　）

A．1．8 天　　*B*．2．5 天　　*C*．3．6 天　　*D*．4．2 天

例 2．（2022 春·广东深圳·高三深圳中学校考阶段练习）设函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$，已知 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有 3 个极值点，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3}\right]$　　B．$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right]$　　C．$\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{13}{3}\right]$　　D．$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right]$

例 3．（多选）（2022 春·吉林长春·高一东北师大附中校考期中）设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，满足 $f(x)=2f(x-2)$，且当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x(2-x)$，若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\le 3$，则实数 m 的取值可以是（　　）

A．3　　B．4　　C．$\dfrac{9}{2}$　　D．$\dfrac{11}{2}$

核心考点二：特殊法

例 4．（辽宁省鞍山市第一中学 2022 届高三下学期六模考试数学试题）若 $e>b>a>\sqrt{e}$，$m=a^b$，$n=b^a$，$p=\log_a b$，则 m，n，p 这三个数的大小关系为（　　）

A．$m>n>p$　　B．$n>p>m$　　C．$n>m>p$　　D．$m>p>n$

例 5．（多选）（广东省佛山市顺德区 2022 届高三下学期三模数学试题）已知 $0<b<a<1$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$\log_a b<\log_b a$　　B．$\log_a b>1$　　C．$a\ln b<b\ln a$　　D．$a\ln a>b\ln b$

例 6．（多选）（2022 春·重庆沙坪坝·高一重庆一中校考阶段练习）我们知道，函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数.有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x+a\right)-b$ 为奇函数.现已知函数 $f\left(x\right)=ax+\dfrac{1}{x-1}+a$，则下列说法正确的是（　　）

A．函数 $y=f\left(x+1\right)-2a$ 为奇函数

B．当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增

C．若方程 $f\left(x\right)=0$ 有实根，则 $a\in\left(-\infty,0\right)\cup\left[1,+\infty\right)$

D．设定义域为 **R** 的函数 $g\left(x\right)$ 关于 $\left(1,1\right)$ 中心对称，若 $a=\dfrac{1}{2}$，且 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的图象共有 2022 个交点，记为 $A_i\left(x_i,y_i\right)\left(i=1,2,\cdots,2022\right)$，则 $\left(x_1+y_1\right)+\left(x_2+y_2\right)+\cdots+\left(x_{2022}+y_{2022}\right)$ 的值为 4044

核心考点三：检验法

例 7．（多选）对于定义在 R 上的函数 $y=f\left(x\right)$，若存在非零实数 x_0，使得 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 和 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上均有零点，则称 x_0 为 $y=f\left(x\right)$ 的一个“折点”．下列函数中存在“折点”的是（　　）

A．$f\left(x\right)=3^{|x-1|}+2$　　B．$f\left(x\right)=\lg\left(\left|x\right|+3\right)-\dfrac{1}{2}$

C．$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x$　　D．$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4}$

例 8．（多选）（2022·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2\cos\left(\omega x+\varphi\right)-1\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过原点，且恰好存在 2 个 $x_0\in\left[0,1\right]$，使得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，则（　　）

A．$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

B．ω 的取值范围为 $\left[\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$

C．一定不存在 3 个 $x_1\in\left[0,1\right]$，使得 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(x_1,-1\right)$ 对称

D．$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{4}\right]$上单调递减

例9．（多选）（2022秋·高二课时练习）在数学中，布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理，它得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔，简单地讲就是对于满足一定条件的连续函数$f(x)$，存在一个点x_0，使得$f\left(x_0\right)=x_0$，那么我们称该函数为“不动点”函数，而称x_0为该函数的一个不动点，依据不动点理论，下列说法正确的是（　　）

A．函数$f(x)=\sin x$有3个不动点

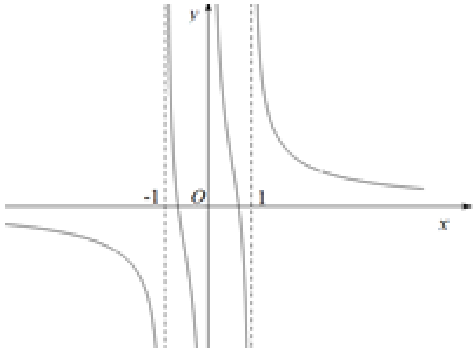
B．函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$至多有两个不动点

C．若函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$没有不动点，则方程$f(f(x))=x$无实根

D．设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in R$，e为自然对数的底数），若曲线$y=\sin x$上存在点(x_0,y_0)使$f(f(y_0))=y_0$成立，则a的取值范围是$[1,e]$

核心考点四：排除法

例10．函数$y=f(x)$的部分图象如图所示，则（　　）



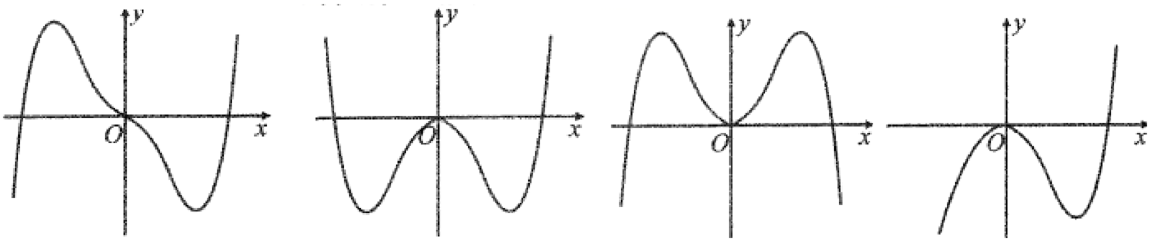
A．$f(x)=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}$

B．$f(x)=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}$

C．$f(x)=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x-1)}$

D．$f(x)=-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}$

例11．定义在R上的函数$f(x)$满足$f(2-x)=f(2+x)$，且在$(2,+\infty)$单调递增，$f(4)=0$，$g(x)=x^4$，则函数$y=f(x+2)g(x)$的图象可能是（　　）



例12．如图1，已知$PABC$是直角梯形，$AB // PC$，$AB\perp BC$，D在线段PC上，$AD\perp PC$．将$\triangle PAD$沿AD折起，使平面$PAD\perp$平面$ABCD$，连接PB，PC，设PB的中点为N，如图2．对于图2，下列选项错误的是（　　）

A．平面$PAB\perp$平面PBC

B．$BC\perp$平面PDC

C．$PD\perp AC$

D．$PB=2AN$

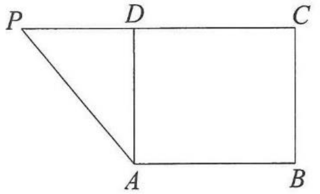


图1

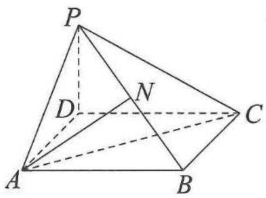


图2

核心考点五：构造法

例13．已知关于x的不等式$e^x-mx-\ln x-\ln(m+1)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$恒成立，则$m$的取值范围是（　　）

A．$(-1,e-1]$　　B．$(-1,1]$　　C．$(e-1,1]$　　D．$(1,e]$

例 14．已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)$ 满足 $(x-1)[f'(x)-f(x)]>0$，$f(2-x)=f(x)\cdot e^{2-2x}$ 则下列判断一定正确的是（　）

A．$f(1)<f(0)$　　*B*．$f(2)>e^{2}f(0)$　　*C*．$f(3)>e^{3}f(0)$　*D*．$f(4)<e^{4}f(0)$

例 15．已知 $a=\log_{\pi}\sqrt{e}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\sin 35°$，$c=\dfrac{e^{\pi}}{\pi^{e}}$，则（　　）

A．$c>b>a$　　*B*．$c>a>b$　　*C*．$b>c>a$　　*D*．$a>b>c$

核心考点六：估算法

例 16．（2020 春·江苏淮安·高三江苏省涟水中学校考阶段练习）古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 称为黄金分割比例），已知一位美女身高 160cm，穿上高跟鞋后肚脐至鞋底的长度约 103.8cm，若她穿上高跟鞋后达到黄金比例身材，则她穿的高跟鞋约是（　　）（结果保留一位小数）

A．7.8cm　　B．7.9cm　　C．8.0cm　　D．8.1cm

例 17．设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，在区间 $[-1,0]$ 上是增函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，则有（　　）

A．$f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f(1)$　　*B*．$f(1)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

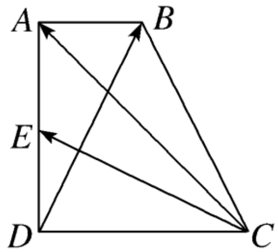
C．$f(1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)$　　*D*．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f(1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

核心考点七：坐标法

例 18．在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°.P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

A．$[-5,3]$　　*B*．$[-3,5]$　　*C*．$[-6,4]$　　*D*．$[-4,6]$

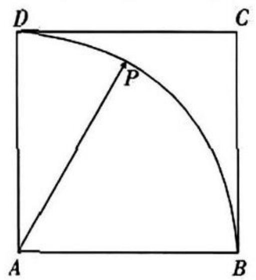
例 19．如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD, AD\perp DC, AD=DC=2AB, E$ 为 AD 的中点，若 $\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}+\mu\overrightarrow{DB}(\lambda,\mu\in R)$，则 $\lambda+\mu$ 的值为（　　）



A．$\dfrac{6}{5}$　　*B*．$\dfrac{8}{5}$

C．2　　*D*．$\dfrac{8}{3}$

例 20．**（多选题）**如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，P 为以 A 为圆心、AB 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{BD}$(包含 B，D) 上的任意一点，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则下列结论正确的是（　　）



A．$x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B．$x+y$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为 4

D．$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最小值为 $4-4\sqrt{2}$

核心考点八：图解法

例 21．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-3x-1, & (x\leqslant 0),\\ 2\ln x, & (x>0),\end{cases}$ 若方程 $f(x)=ax$ 有三个不同的解 x_1， x_2， x_3，则 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,\dfrac{2}{e})$　　B．$(0,\dfrac{2}{e}]$　　C．$(\dfrac{2}{e},1]$　　D．$(0,1)$

例 22．已知 A，B 是圆 O：$x^2+y^2=1$ 上的两个动点，$|AB|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$，$M$ 为线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

例 23．过原点 O 的直线交双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 于 A，C 两点，A 在第一象限，F_1、F_2 分别为 E 的左、右焦点，连接 AF_2 交双曲线 E 右支于点 B，若 $|OA|=|OF_2|$，$2|CF_2|=3|BF_2|$，则双曲线 E 的离心率为（　　）．

A．$\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{13}}{4}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{53}}{5}$