2021年新高考模拟演练第7题的解法探究和拓展变式

孙婷婷
(湖北省水果湖高级中学,430071)

2021年1月底,湖北、湖南、广东、重庆、江苏、河北、辽宁、福建八省市高三学生参加了由教育部考试中心统一命题的2021年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练(简称"八省联考"),目的是让学生熟悉新高考的试卷结构和主要题型.

2021年1月"八省联考"数学试题第7题为:

题1　已知抛物线 $y^2=2px$ 上三点 $A(2,2)$, B,C,直线 AB,AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线,则直线 BC 的方程为(　　).

A. $x+2y+1=0$　　B. $3x+6y+4=0$

C. $2x+6y+3=0$　　D. $x+3y+2=0$

这道试题具有一定的综合性,考查了直线、圆和抛物线的方程及几何性质,考查了直线与直线、直线与圆、圆与抛物线的位置关系,考查了学生的逻辑推理和数学运算等核心素养.笔者分析了试题的解法,并对该试题进行了拓展研究,得到了一些结果,介绍如下.

一、解法探究

因为点 $A(2,2)$ 在抛物线上,所以 $2^2=4p$,解得 $p=1$,故抛物线的方程为 $y^2=2x$.

根据题设条件,从不同的角度进行思考,可以得到多种解法.

解法1　设过点 A 且与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的切线方程为 $y-2=k(x-2)$,即 $kx-y+2-2k=0$,则圆心 $M(2,0)$ 到切线的距离 $d=\frac{|2k-0+2-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

可得直线 AB、AC 的方程为 $y-2=\sqrt{3}(x-2)$,$y-2=-\sqrt{3}(x-2)$,分别与抛物线方程 $y^2=2x$ 联立,可得 $B(\frac{8-4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}-6}{3})$,$C(\frac{8+4\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}+6}{3})$.

于是可得直线 BC 的斜率为

$$k_{BC}=\frac{-\frac{2\sqrt{3}+6}{3}-\frac{2\sqrt{3}-6}{3}}{\frac{8+4\sqrt{3}}{3}-\frac{8-4\sqrt{3}}{3}}=-\frac{1}{2},$$

所以直线 BC 的方程为 $y-\frac{2\sqrt{3}-6}{3}=-\frac{1}{2}(x-\frac{8-4\sqrt{3}}{3})$,即 $3x+6y+4=0$,故选B.

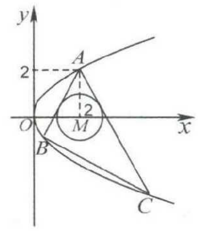

图1

解法2　如图1,圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $M(2,0)$,半径为1,则 $AM=2$,$AM\perp x$ 轴,$\sin\angle BAM=\frac{1}{2}$,所以 $\angle BAM=\frac{\pi}{6}$,所以直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,故直线 AB 的方程为 $y-2=\sqrt{3}(x-2)$.由对称性知直线 AC 的方程为 $y-2=-\sqrt{3}(x-2)$.下同解法1.

解法3　同解法2,可得直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,由对称性知直线 AC 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$.

设 $B(\frac{y_1^2}{2},y_1)$,$C(\frac{y_2^2}{2},y_2)$,则

$$k_{AB}=\frac{2-y_1}{2-\frac{y_1^2}{2}}=\frac{2}{2+y_1}=\sqrt{3},$$

$$k_{AC}=\frac{2-y_2}{2-\frac{y_2^2}{2}}=\frac{2}{2+y_2}=-\sqrt{3},$$

故 $y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-2$,$y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}-2$,所以

$$k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}}=\frac{2}{y_2+y_1}=-\frac{1}{2},$$

于是直线 BC 的方程为 $y-y_1=-\frac{1}{2}(x-\frac{y_1^2}{2})$,化简得 $3x+6y+4=0$,故选B.

评注　解法1和解法2都是常规解法,先求出

两切线的方程,与椭圆方程联立计算出 B、C 两点的坐标,进而求出直线 BC 的方程.解法1由圆心 M 到切线 AB、AC 的距离等于圆的半径,求得直线 AB、AC 的斜率;解法2结合图形,先求出直线的倾斜角再求斜率.解法3没有直接求 B、C 两点的坐标,而是利用 $y_1+y_2=-4$ 这一结果求直线 BC 的斜率.这几种解法的计算量较大,很多学生因为运算错误导致失分.

解法4　设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则 $y_1^2=2x_1$,$y_2^2=2x_2$.

因为 $k_{AB}=\dfrac{y_1-2}{x_1-2}=\dfrac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{2}-2}=\dfrac{2}{y_1+2}$,所以直线 AB 的方程为 $y-2=\dfrac{2}{y_1+2}(x-2)$,即

$$2x-(y_1+2)y+2y_1=0.$$

由于直线 AB 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切,圆心 $M(2,0)$ 到直线 AB 的的距离 $\dfrac{|2\times2+2y_1|}{\sqrt{2^2+(y_1+2)^2}}=1$,整理得 $3y_1^2+12y_1+8=0$,故 $3x_1+6y_1+4=0$,即点 B 在直线 $3x+6y+4=0$ 上.

同理可得点 C 在直线 $3x+6y+4=0$ 上.

因此,直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$,故选B.

解法5　同解法2,可得直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$.

设 $B(x_1,y_1)$,则 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2}$.由 $k_{AB}=\tan\dfrac{\pi}{3}$ 得 $\dfrac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{2}-2}=\sqrt{3}$,即 $\dfrac{2}{y_1+2}=\sqrt{3}$,所以 $(\dfrac{2}{y_1+2})^2=3$,于是有 $3y_1^2+12y_1+8=0$,故 $3x_1+6y_1+4=0$,即点 B 在直线 $3x+6y+4=0$ 上.

同理可得点 C 在直线 $3x+6y+4=0$ 上.

因此,直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$,故选B.

评注　这两种解法结合图形的特征,从方程思想和同构视角出发,设而不求,大大减少了计算量,快速得出正确的答案,但对思维的要求较高.

二、拓展变式

由解法3可知:$k_{BC}=\dfrac{2}{y_1+y_2}$.一般地,设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的两点,则可得 $k_{BC}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$.

将条件一般化,采用前文的方法,可以证明如下结论:已知 $A(x_0,y_0)$,B,C 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上三点,若直线 AB、AC 的倾斜角互补,则直线 BC 的斜率为定值,即 $k_{BC}=-\dfrac{p}{y_0}$.

题1中,圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $M(2,0)$,$AM\perp x$ 轴,去掉这一特殊条件,考虑下面的变式1.

变式1　已知抛物线 $y^2=2x$ 上三点 $A(2,2)$,B,C,直线 AB,AC 是圆 $(x-t)^2+y^2=1(t\in\mathbf{R})$ 的两条切线,求直线 BC 的方程.

解　设 $B(\dfrac{m^2}{2},m)$,$C(\dfrac{n^2}{2},n)$,$m\neq n$,则可得 $k_{BC}=\dfrac{2}{m+n}$,直线 BC 的方程为 $y-n=\dfrac{2}{m+n}(x-\dfrac{n^2}{2})$,即 $2x-(m+n)y+mn=0$.

同理可得:直线 AB,AC 的方程分别为 $2x-(m+2)y+2m=0$,$2x-(n+2)y+2n=0$.

因为直线 AB 与圆 $(x-t)^2+y^2=1$ 相切,圆心 $M(t,0)$ 到直线 AB 的的距离 $\dfrac{|2t+2m|}{\sqrt{2^2+(m+2)^2}}=1$,整理得

$$3m^2+(8t-4)m+4t^2-8=0.$$

又因为直线 AC 与圆 $(x-t)^2+y^2=1$ 相切,同理可得 $3n^2+(8t-4)n+4t^2-8=0$.

所以 m,n 是关于 x 的方程 $3x^2+(8t-4)x+4t^2-8=0$ 的两根,由韦达定理可得

$$m+n=\frac{4-8t}{3},mn=\frac{4t^2-8}{3}.$$

代入可得直线 BC 的方程为 $3x+(4t-2)y+2t^2-4=0$.

评注　当 $t=2$ 时,直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$,即为题1的答案.

改变题设条件,还可以考虑下面的变式2:

变式2　已知抛物线 $y^2=2x$ 上三点 $A(x_0,y_0)$,B,C,直线 AB,AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线,求直线 BC 的方程.

解　设 $B(\dfrac{m^2}{2},m)$,$C(\dfrac{n^2}{2},n)$,$m\neq n$,则可得 $k_{BC}=\dfrac{2}{m+n}$,直线 BC 的方程为 $y-n=\dfrac{2}{m+n}(x-\dfrac{n^2}{2})$,即 $2x-(m+n)y+mn=0$.

同理可得:直线 AB,AC 的方程分别为 $2x-(m+y_0)y+my_0=0$,$2x-(n+y_0)y+ny_0=0$.

因为直线 AB 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切,圆心

$M(2,0)$ 到直线 AB 的的距离 $\frac{|4+my_0|}{\sqrt{2^2+(m+y_0)^2}}=1$,整理得

$$(y_0^2-1)m^2+6y_0m+12-y_0^2=0.$$

又因为直线 AC 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切,同理可得 $(y_0^2-1)n^2+6y_0n+12-y_0^2=0$

又 $m\neq n$,所以 m,n 是关于 x 的方程 $(y_0^2-1)x^2+6y_0x+12-y_0^2=0$ 的两根,由韦达定理可得

$$m+n=-\frac{6y_0}{y_0^2-1},mn=\frac{12-y_0^2}{y_0^2-1}.$$

代入可得直线 BC 的方程为 $2(y_0^2-1)x+6y_0y+12-y_0^2=0$.

评注　当 $y_0=2$ 时,直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$,即为题1的答案.

更一般地,可以考虑下面的变式3:

变式3　已知抛物线 $y^2=2x$ 上三点 $A(x_0,y_0)$,B,C,直线 AB,AC 是圆 $(x-a)^2+y^2=r^2(a>r>0)$ 的两条切线,求直线 BC 的方程.

解　设 $B(\frac{m^2}{2},m)$,$C(\frac{n^2}{2},n)$,$m\neq n$,则可得 $k_{BC}=\frac{2}{m+n}$,直线 BC 的方程为 $y-n=\frac{2}{m+n}(x-\frac{n^2}{2})$,即 $2x-(m+n)y+mn=0$.

同理可得:直线 AB,AC 的方程分别为 $2x-(m+y_0)y+my_0=0$,$2x-(n+y_0)y+ny_0=0$.

因为直线 AB 与圆 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 相切,圆心 $M(a,0)$ 到直线 AB 的的距离 $\frac{|2a+my_0|}{\sqrt{2^2+(m+y_0)^2}}=r$,整理得

$$(y_0^2-r^2)m^2+2y_0(2a-r^2)m+4a^2-4r^2-r^2y_0^2=0.$$

又因为直线 AC 与圆 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 相切,同理可得

$$(y_0^2-r^2)n^2+2y_0(2a-r^2)n+4a^2-4r^2-r^2y_0^2=0$$

又 $m\neq n$,所以 m,n 是关于 x 的方程 $(y_0^2-r^2)x^2+2y_0(2a-r^2)x+4a^2-4r^2-r^2y_0^2=0$ 的两根,由韦达定理可得 $m+n=-\frac{2y_0(2a-r^2)}{y_0^2-r^2}$,$mn=\frac{4a^2-4r^2-r^2y_0^2}{y_0^2-r^2}$.

代入可得直线 BC 的方程为 $2(y_0^2-r^2)x+2y_0(2a-r^2)y+4a^2-4r^2-r^2y_0^2=0$.

评注　当 $y_0=2,a=2,r=1$ 时,直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$,即为题1的答案.

题1中,直线 AB,AC 都是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的切线,但直线 BC 不是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的切线.能否改变条件,使得 BC 也是圆的切线呢?考虑下面的变式4和变式5.

变式4　已知抛物线 $y^2=2x$ 上三点 $A(2,2)$,B,C,直线 AB,AC,BC 都是圆 $(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 的切线,求圆的半径 r.

解　因为点 $A(2,2)$ 在圆外,所以 $(2-2)^2+2^2>r^2$,解得 $0<r<2$.又因为圆 $(x-2)^2+y^2=r^2$ 和抛物线 $y^2=2x$ 没有公共点,联立它们的方程,消去 y,得 $x^2-2x+4-r^2=0$,则 $\Delta=(-2)^2-4(4-r^2)<0$,解得 $0<r<\sqrt{3}$.于是可知:$0<r<\sqrt{3}$.

设 $B(\frac{m^2}{2},m)$,$C(\frac{n^2}{2},n)$,$m\neq n$,则可得 $k_{BC}=\frac{2}{m+n}$,直线 BC 的方程为 $y-n=\frac{2}{m+n}(x-\frac{n^2}{2})$,即 $2x-(m+n)y+mn=0$.

因为直线 BC 与圆 $(x-2)^2+y^2=r^2$ 相切,所以圆心 $M(2,0)$ 到直线 BC 的的距离 $\frac{|4+mn|}{\sqrt{2^2+(m+n)^2}}=r$,故

$$(4+mn)^2=r^2[4+(m+n)^2].\qquad ①$$

同理可得:直线 AB,AC 的方程分别为 $2x-(m+2)y+2m=0$,$2x-(n+2)y+2n=0$.

因为直线 AB 与圆 $(x-2)^2+y^2=r^2$ 相切,所以圆心 M 到直线 AB 的的距离 $\frac{|4+2m|}{\sqrt{2^2+(m+2)^2}}=r$,整理得

$$(4-r^2)m^2+(16-4r^2)m+16-8r^2=0.$$

又因为直线 AC 也与圆 $(x-2)^2+y^2=r^2$ 相切,同理可得

$$(4-r^2)n^2+(16-4r^2)n+16-8r^2=0.$$

所以 m,n 是关于 x 的方程 $(4-r^2)x^2+(16-4r^2)x+16-8r^2=0$ 的两根,由韦达定理可得

$$m+n=4,mn=\frac{16-8r^2}{4-r^2}.$$

代入①式整理得 $5r^6-76r^4+272r^2-256=0$,因式分解得 $(5r^2-16)(r^4-12r^2+16)=0$,解得 $r^2=\frac{16}{5}$(舍去)或 $r^2=6+2\sqrt{5}$(舍去)或 $r^2=6-2\sqrt{5}$,故 $r=\sqrt{5}-1$.

变式5　已知 $A(x_0,y_0)(x_0\neq 2)$ 为抛物线 $y^2=2x$ 上一点,过点 A 作圆 $M:(x-4)^2+y^2=4$ 的两条切线 AB,AC(B,C 为切点),则直线 BC 也是圆 M 的切线.

(下转封四)

开展第二十一届中学生数学论文竞赛的公告

2001 年至今，我刊已开展了二十届中学生数学论文竞赛，得到了广大中学师生的广泛关注，参赛论文中不乏优秀之作，部分获奖论文已在我刊“学生论坛”栏目刊出。为了反映学生的学习成果，鼓励学生的创新意识，支持中学生数学论文写作这一活动，我刊今年继续开展第二十一届中学生数学论文竞赛，具体事项安排如下。

1. 选题范围

(1) 学习心得 围绕中学数学教材中某一节、某一课或者某一题谈谈自己的学习体会，用具体的素材反映自己在学习过程中的心路历程。

(2) 研究成果 以教材中的知识点为基础，通过类比、推广、想象等思维活动得到的“源于课本而又高于课本”的“新成果”。

(3) 数学应用 用所掌握的数学知识解决现实生活中的实际问题，文章要有现实背景材料、具体数据、数学模型、解答过程和实际结果。

(4) 问题争鸣 对一个问题与众不同的理解，对一道试题与众不同的解法，对某些知识的争鸣与辨析等。

2. 写作要求

(1) 基本要求 主题明确，重点突出，内容精炼（以不超过 3000 字为宜），表达准确流畅。

(2) 读者定位 文章要有新意，所涉及的知识和方法适合中学生阅读。

(3) 鼓励导向 欢迎不落俗套的短文，以培养创新意识为宗旨，鼓励内容和表达方式方面的创新。

3. 注意事项

(1) 参赛论文可以是手写稿，也可以是打印稿，要求字迹工整，图形正确。

(2) 请在论文首页注明以下基本情况：姓名，学校，年级，邮政编码，指导老师，联系电话。

(3) 参赛论文务必于 2021 年 12 月 10 日前发送到邮箱 shxtxxuesh@163.com，纸质稿件通过邮局邮寄到“430079，湖北武汉华中师范大学《数学通讯》编辑部”，并在信封上注明“中学生论文竞赛”字样。

4. 评奖事宜

本次中学生数学论文竞赛由本刊相关编委组成评委会，评出特等奖 3～8 名，一等奖 30～60 名，二等奖若干名，获奖名单将在本刊和本刊网站公布，部分优秀获奖论文将安排在本刊刊出。向获奖者颁发获奖证书，向指导教师颁发优秀指导教师证书，领取证书时将适当收取工本费和邮寄费用。

欢迎广大中学生积极参赛，也欢迎广大数学老师组织学生参赛。

《数学通讯》编辑部

（上接第 28 页）

解 设 $B(\frac{m^2}{2},m)$，$C(\frac{n^2}{2},n)$，$m\neq n$，则可得 $k_{BC}=\frac{2}{m+n}$，直线 BC 的方程为 $y-n=\frac{2}{m+n}(x-\frac{n^2}{2})$，即 $2x-(m+n)y+mn=0$.

同理可得：直线 AB，AC 的方程分别为 $2x-(m+y_0)y+my_0=0$，$2x-(n+y_0)y+ny_0=0$.

因为直线 AB 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 相切，圆心 $M(4,0)$ 到直线 AB 的的距离 $\frac{|8+my_0|}{\sqrt{2^2+(m+y_0)^2}}=2$，整理得

$$(y_0^2-4)m^2+8y_0m+48-4y_0^2=0.$$

又因为直线 AC 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 相切，同理可得

$$(y_0^2-4)n^2+8y_0n+48-4y_0^2=0$$

又 $m\neq n$，所以 m,n 是关于 x 的方程 $(y_0^2-4)x^2+8y_0x+48-4y_0^2=0$ 的两根，由韦达定理可得

$$m+n=-\frac{8y_0}{y_0^2-4},mn=\frac{48-4y_0^2}{y_0^2-4}.$$

代入可得直线 BC 的方程为 $(y_0^2-4)x+4y_0y+24-2y_0^2=0$，所以圆心 $M(4,0)$ 到直线 BC 的距离

$$d=\frac{|4(y_0^2-4)+24-2y_0^2|}{\sqrt{(y_0^2-4)^2+(4y_0)^2}}=2,$$

故直线 BC 也是圆 M 的切线.

（收稿日期：2021－01－30）

邮发代号：38-334（上半月）
中国邮政报刊订阅网址：http://bk.11185.cn
刊号：ISSN 0488-7395
CN 42-1152/O1
定价：10.00 元