江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科导学案
直线与圆锥曲线的位置关系

研制人：周国祥　　　审核人：陈宏强

班级：______________ 姓名：______________ 学号：__________ 授课日期：

【考情分析】

考查圆锥曲线的题目有小有大,其中小题以考查圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程及几何性质为主，难度在中等或以上；大题则主要考查直线与椭圆、双曲线、抛物线的位置关系问题，该题一般分2问，第1问一般考查曲线的方程，第2问一般考查弦长、三角形面积、定点、定值及最值问题. 命题的主要特点有：一是以过特殊点的直线与圆锥曲线相交为基础设计“连环题”，结合曲线的定义及几何性质，利用待定系数法先行确定曲线的标准方程，进一步研究弦长、图形面积、最值、取值范围等；二是以不同曲线(圆、椭圆、双曲线、抛物线)的位置关系为基础设计“连环题”，结合曲线的定义及几何性质，利用待定系数法先行确定曲线的标准方程，进一步研究弦长、图形面积、最值、取值范围、定点、定值等；三是直线与圆锥曲线的位置关系问题，综合性较强，往往与向量(共线、垂直、数量积)结合，涉及方程组联立，根的判别式、根与系数的关系问题等.

【真题感悟】

1. (多选题)(2022 新高考全国 Ⅰ 卷)已知O为坐标原点,点$A(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上,过点$B(0,-1)$的直线交C于P,Q两点,则(　　)

A.C的准线为$y=-1$　　B.直线AB与C相切　　C.$|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　D.$|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

2.(2022 北京卷)已知椭圆:$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,1)$,焦距为$2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆E的方程;

(2)过点$P(-2,1)$作斜率为k的直线与椭圆E交于不同的两点B,C,直线AB,AC分别与x轴交于点M,N,当$|MN|=2$时,求k的值.

【典例导引】

例 1．(2022 江苏南京市模拟)已知P为曲线C上一点,M,N为圆$x^2+y^2=4$与x轴的两个交点,直线PM,PN的斜率之积为$-\frac{1}{4}$.

(1)求C的轨迹方程;

(2)若一动圆的圆心Q在曲线C上运动,半径为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.过原点O作动圆Q的两条切线,分别交椭圆于E,F两点,当直线OE,OF的斜率存在时,$k_{OE}\cdot k_{OF}$是否为定值?请证明你的结论.

例 2．(2022 江苏盐城市模拟)动点$M(x,y)$到定点$F(\sqrt{3},0)$的距离与到定直线$l:x=2\sqrt{3}$的距离之比是常数$\frac{\sqrt{2}}{2}$，记动点M的轨迹为曲线C.

(1)求曲线C的方程;

(2)设$P(m,n)$是曲线C上的一动点,由原点O向圆$(x-m)^2+(y-n)^2=2$引两条切线,分别交曲线C于点A,B,若直线OA,OB的斜率均存在,并分别记为k_1,k_2,试问$|OA|^2+|OB|^2$是否为定值?若是,求出该值;若不是,请说明理由.

例 3．（2020 天津卷）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,-3)$,右焦点为$F$,且$|OA|=|OF|$,其中$O$为原点.

(1)求椭圆的方程;

(2)已知点C满足$3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$,点$B$在椭圆上($B$异于椭圆的顶点),直线$AB$与以$C$为圆心的圆相切于点$P$,且$P$为线段$AB$的中点.求直线$AB$的方程.

例 4. (2021 新高考全国 II 卷)已知椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)设M,N是椭圆C上的两点,直线MN与曲线$x^2+y^2=b^2(x>0)$相切.证明:M,N,F三点共线的充要条件是$|MN|=\sqrt{3}$.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科作业
直线与圆锥曲线的位置关系

研制人：周国祥　　审核人：陈宏强

班级：____________ 姓名：_____________ 学号：_________ 时长：60 分钟

1. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c,F_1,F_2$为其左、右两个焦点,直线$l$经过点$(0,b)$且与渐近线平行,若$l$上存在第一象限的点$P$满足$|PF_1|-|PF_2|=2b$,则双曲线$C$离心率的取值范围为(　　)

A.$(1,\sqrt{2})$　　B.$(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　C.$(1,\sqrt{3})$　　D.$(\sqrt{2},+\infty)$

2. (2021 山东威海市三模)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2,P$为双曲线左支上位于第二象限的一点,且满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,若直线$PF_2$与圆$x^2+y^2=\frac{b^2}{4}$相切,则双曲线的离心率为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{5}$　　D.2

3. (2021 山东临沂市三模)在平面直角坐标系xOy中,已知A,B为圆$C:(x-m)^2+(y-2)^2=4$上两个动点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，若直线$l:y=-2x$上存在唯一的一个点P，使得$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，则实数$m$的值为(　　)

A.$\sqrt{5}+1$或$1-\sqrt{5}$　　B.$-1+\sqrt{5}$或$-1-\sqrt{5}$　　C.$\sqrt{5}-1$或$1+\sqrt{5}$　　D.$-\sqrt{5}+1$或$-1-\sqrt{5}$

4. (2021 湖北高三联合测评)已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右顶点分别为$A,B$,过$x$轴上点$M(-4,0)$作一直线$PQ$与椭圆交于$P,Q$两点(异于$A,B$),若直线$AP$和$BQ$的交点为$N$,记直线$MN$和$AP$的斜率分别为$k_1,k_2$,则$k_1:k_2=$(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.3　　C.$\frac{1}{2}$　　D.2

5.(**多选题**)已知双曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,过坐标原点$O$的直线与双曲线$C$交于$A,B$两点,点$P$为双曲线$C$上异于$A,B$的一动点,则下列结论正确的有(　　)

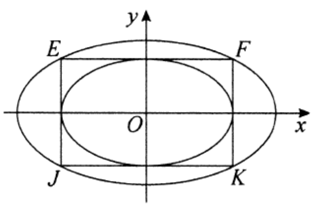
A.$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}$的最大值为 9

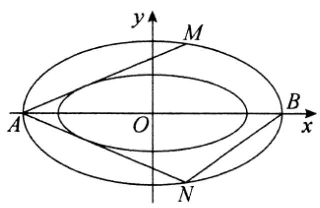
B.若以AB为直径的圆经过双曲线的右焦点F_2,则$S_{\triangle AF_1F_2}=16$

C.若$|PF_1|=7$,则有$|PF_2|=1$或 13

D.设PA,PB的斜率分别为k_1,k_2,则$\frac{1}{k_1^2}+\frac{4}{k_2^2}$的最小值为$\frac{9}{4}$

6.(**多选题**)(2022 湖北模拟)第 24 届冬季奥林匹克运动会圆满结束.根据规划,国家体育场(鸟巢)成为北京冬奥会开、闭幕式的场馆.国家体育场“鸟巢”的钢结构鸟瞰图如图所示,内外两圈的钢骨架是离心率相同的椭圆,若椭圆$C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$和椭圆$C_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>b_2>0)$的离心率相同,且$a_1>a_2$.则下列正确的是(　　)





A.$a_1^2-a_2^2<b_1^2-b_2^2$

B.$a_1-a_2>b_1-b_2$

C.如果两个椭圆C_2,C_1分别是同一个矩形(此矩形的两组对边分别与两坐标轴平行)的内切椭圆和外接椭圆,则$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{2}$

D.由外层椭圆C_1的左顶点A向内层椭圆C_2分别作两条切线与C_1交于两点M,N,C_1的右顶点为B,若直线AM与BN的斜率之积为$\frac{8}{9}$,则椭圆C_1的离心率为$\frac{1}{3}$

7.(2021 湖北黄冈市二模)已知椭圆$ax^2+by^2=1$与直线$x+y=1$交于点A,B,点M为AB的中点,直线MO(O为原点)的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,则$\frac{b}{a}=$______;又$OA\perp OB$,则$2a+b=$__________.

8.(2022 新高考全国Ⅰ卷)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$C$的上顶点为$A$,两个焦点为$F_1,F_2$,离心率为$\frac{1}{2}$.过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D,E$两点,$|DE|=6$,则$\triangle ADE$的周长是__________.

9.(2021 湖南岳阳市一模)已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$,点$P(4,\sqrt{3})$在$C$上.

(1)求双曲线C的方程;

(2)设过点$(1,0)$的直线l与曲线C交于M,N两点,问在x轴上是否存在定点Q,使得$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$为常数?若存在,求出点$Q$坐标及此常数的值;若不存在,请说明理由.

10.(2021 北京卷)已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,-2)$,以四个顶点围成的四边形面积为$4\sqrt{5}$.

(1)求椭圆E的标准方程;

(2)过点$P(0,-3)$的直线l斜率为k,交椭圆E于不同的两点B,C,直线AB,AC交$y=-3$于点M,N,直线AC交$y=-3$于点N,若$|PM|+|PN|\leqslant 15$,求k的取值范围.

11.(2021 广东肇庆市二模)已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$C_1$的长轴是圆$C_2:x^2+y^2=2$的直径.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)过椭圆C_1的左焦点F作两条相互垂直的直线l_1,l_2,其中l_1交椭圆C_1于P,Q两点,l_2交圆C_2于M,N两点,求四边形$PMQN$面积的最小值.