江苏省仪征中学2023届高三数学周末练习（十二）

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	C	B	A	D	A	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ABD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\sqrt{3}$；14．240；15．$(1,1)$，答案不唯一，只需满足横纵坐标相等即可；16．$\sqrt{3}$．

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．【解析】

（1）由题意及参考数据可得：

$$\overline{x}=3，\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10，\sqrt{(\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-5\overline{x}^2)(\sum_{i=1}^{5}{y_i}^2-5\overline{y}^2)}\approx 1564，$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}=17081-3\times 6206=-1537，$$

所以 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-5\overline{x}^2)(\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2-5\overline{y}^2)}}\approx\dfrac{-1537}{1564}\approx -0.98$，

因为 y 与 x 的相关系数近似为 -0.98，说明 y 与 x 的线性相关程度相当高，从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.

（2）由 $\overline{y}=\dfrac{6206}{5}=1241.2$ 及（1）得：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{-1537}{10}=-153.7$，

$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1241.2-(-153.7)\times 3=1702.3$．

所以 y 关于 x 的回归方程为：$\hat{y}=-153.7x+1702.3$．

将 2023 年对应的年份编号 $x=6$ 代入回归方程得：$\hat{y}=-153.7\times 6+1702.3=780.1$．

所以 我国 2023 年的新生儿数量约 780.1 万人．

18．【解析】

（1）因为 $S_n=2^{n+1}-2$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n$，$n\geqslant 2$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，适合上式，所以 $a_n=2^n$．

所以 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$．

（2）$T_n=a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+\cdots+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

因为 $S_n=2^{n+1}-2$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n^2+n}{2}$，

所以 $T_n=(2^{n+1}-2)(\dfrac{n^2+n}{2})=(2^n-1)(n^2+n)$．

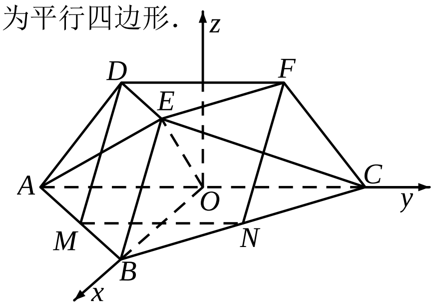
19．【解析】

（1）因为 三棱台 $ABC-DEF$ 是正三棱台，M 为棱 AB 的中点，$AB=2DE$．

所以 $DE\,/\!/\,MB$ 且 $DE=MB$，所以 四边形 $DMBE$ 为平行四边形，

所以 $MD\,/\!/\,BE$ 且 $MD=BE$，同理 $NF\,/\!/\,BE$ 且 $NF=BE$；

所以 $MD\,/\!/\,NF$ 且 $MD=NF$，所以 四边形 $DMNF$ 为平行四边形．



取 AC 的中点为 O，连接 AE，EC，OE，OB，

因为 $EA=EC$，$BA=BC$，

所以 $AC\perp OB$，$AC\perp OE$，又 $OB\cap OE=O$，

所以 直线 $AC\perp$ 面 BOE，又 $BE\subset$ 面 BOE，

所以 $AC\perp BE$，又 $MN\,/\!/\,AC$，$MD\,/\!/\,BE$，所以 $MN\perp MD$，

所以 四边形 $DMNF$ 为矩形．

（2）以 O 为原点，OB，OC 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立空间直角坐标系．

设正方形 $DMNF$ 的边长为 1，则 $DE=1$，$AB=2$，$BE=1$．

则 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，

则 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，

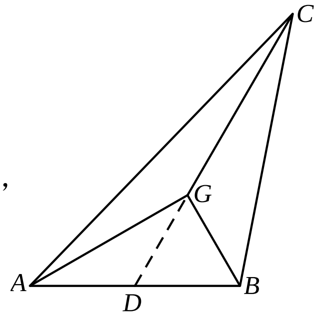
设平面 $ACFD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，令$z=-1$，得$\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$，

设BC与平面$ACFD$所成的角为θ，所以 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{4}\times\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 直线BC与平面$ACDF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20.【解析】



（1）延长CG交AB于点D，因为 G是$\triangle ABC$的重心，

则 D为线段AB的中点，且$DG=\dfrac{1}{2}GC$，又$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}=0$，

所以 $GA\perp GB$，因此 $DG=DA=\dfrac{1}{2}c$， $GC=2DG=c$，

又因为 $\angle GAD=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，在$\triangle AGC$中，记$\angle CAG=\alpha$，

由正弦定理 $\dfrac{AG}{\sin\angle ACG}=\dfrac{CG}{\sin\alpha}$，即 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}=\dfrac{c}{\sin\alpha}$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$，即 $\cos\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，即 $\tan\angle CAG=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

（2）由（1）可知$CD=\dfrac{3}{2}c$，在$\triangle ABC$中，$\cos\angle BAC=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot AB}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

在$\triangle ACD$中，$\cos\angle DAC=\dfrac{AD^2+AC^2-DC^2}{2\cdot AD\cdot AC}=\dfrac{\frac{c^2}{4}+b^2-\frac{9c^2}{4}}{2\cdot b\cdot\frac{c}{2}}=\dfrac{b^2-2c^2}{bc}$，

所以 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2-2c^2}{bc}$，整理得 $a^2+b^2=5c^2$，

在$\triangle ABC$中，$\cos\angle ACB=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)}{5ab}\geqslant\dfrac{4}{5}$，

当且仅当$a=b$时，等号成立；

又$\angle ACB\in(0,\pi)$，所以 $\cos\angle ACB<1$，

综上 $\cos\angle ACB$的取值范围为$[\dfrac{4}{5},1)$.

21.【解析】

（1）由题意可知$\begin{cases}2a=4\\ab=2\end{cases}$，解得$a=2,b=1$；所以 椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由（1）可知$A(2,0),B(0,1)$，则直线AB的方程为$x+2y-2=0$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，因为 $PQ\perp x$轴，所以 $P(x_1,1-\frac{x_1}{2})$，

因为 P为线段QM 的中点，所以 $Q(x_1,2-x_1-y_1)$，

又因为 A,Q,N三点共线，所以 $\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{2-x_1-y_1}{x_1-2}$，即 $\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=-1$.

设直线$MN:y=kx+m$，代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$并整理得：

$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，　则$x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$；

所以 $\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{kx_1+m}{x_1-2}+\frac{kx_2+m}{x_2-2}=\frac{2kx_1x_2+(m-2k)(x_1+x_2)-4m}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{2k\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+(m-2k)\frac{-8km}{4k^2+1}-4m}{\frac{4m^2-4}{4k^2+1}-2\frac{-8km}{4k^2+1}+4}=\frac{-1}{2k+m}=-1$，所以 $m=1-2k$，

所以 直线MN的方程为：$y=kx+1-2k=k(x-2)+1$，

故直线MN过定点$(2,1)$.

22.【解析】

（1）当$a=0$时，$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in[1,\mathrm{e}]$．$f'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，

令$f'(x)=0$，得$x=\sqrt{\mathrm{e}}$．当$x\in(1,\sqrt{\mathrm{e}})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

因为 $f(1)=0$，$f(\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

所以 $f(x)$的值域为$[0,\frac{1}{2\mathrm{e}}]$.

（2）$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-a)^2-2(x-a)\ln x}{(x-a)^4}=\frac{1-\frac{a}{x}-2\ln x}{(x-a)^3}$，

$f(x)$的极值点等价于$f'(x)$的变号零点．设$g(x)=1-\frac{a}{x}-2\ln x$.

①若$a\leqslant 0$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$(x-a)^3>0$.

显然 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减;

因为 $g(1)=1-a>0$，$g(e-a)=1-\dfrac{a}{e-a}-2\ln(e-a)<0$，

所以 存在唯一的 $x_0\in(1,\mathrm{e}-a)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 存在唯一极大值点，符合题意.

②若 $a>0$，$f(x)$ 定义域为 $(0,a)\cup(a,+\infty)$

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$(x-a)^3>0$．$g(x)=1-\dfrac{a}{x}-2\ln x$，$g'(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{a-2x}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 单调递减，注意到 $g(a)=-2\ln a$．

（i）$a>1$ 时，$g(a)<0$，所以 $g(x)<0$，所以 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 上无极值点;

（ii）$a=1$ 时，$g(a)=0$，所以 $g(x)\leqslant 0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 上无极值点;

（iii）$0<a<1$ 时，$g(a)>0$，$g(2)<0$，

所以 存在唯一的 $x_1\in(a,2)$，$g(x_1)=0$，即 $f'(x_1)=0$．

当 $x\in(a,x_1)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$；

所以 $x=x_1$ 为 $f(x)$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 的极大值点，

此时 $f(x)$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 有一个极值点.

当 $x\in(0,a)$ 时，$(x-a)^3<0$．

$g(x)=1-\dfrac{a}{x}-2\ln x$，$g'(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{a-2x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{a}{2}$．

当 $x\in(0,\dfrac{a}{2})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(\dfrac{a}{2},a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

令 $g(\dfrac{a}{2})=-1-2\ln\dfrac{a}{2}=0$，得 $a=\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$．

（i）$a>1$ 时，若 $a\in(1,\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}})$，$g(\dfrac{a}{2})>0$，$g(a)=-2\ln a<0$，

当 $x\in(0,\dfrac{a}{2})$ 时，$g(\dfrac{a^2}{16})=1-\dfrac{16}{a}-2\ln\dfrac{a^2}{16}<1-\dfrac{16}{a}+\dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{a^2}{16}}}-4=-3<0$，

所以 存在 $x_2\in(\dfrac{a^2}{16},\dfrac{a}{2})$，$x_3\in(\dfrac{a}{2},a)$，$g(x_2)=g(x_3)=0$．

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$，

当 $x\in(x_2,x_3)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_3,a)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$；

所以 $x=x_2$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=x_3$ 为 $f(x)$ 的极小值点；

此时 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有两个极值点.

若 $a\in(\dfrac{2}{\sqrt{e}},+\infty)$，则 $g(\dfrac{a}{2})\leqslant 0$，$g(x)\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，

此时 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上无极值点；

故 $a>1$ 不符合题意.

（ii）当 $a=1$ 时，$g(\dfrac{1}{2})>0$，$g(\dfrac{1}{16})<0$，$g(1)=0$；

所以 存在唯一 $x_4\in(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{2})$，使得 $g(x_4)=0$，

当 $x\in(0,x_4)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$，

当 $x\in(x_4,1)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)<0$；

所以 $x=x_4$ 为 $f(x)$ 的极大值点；此时 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 有一个极值点，

故 $a=1$ 符合题意.

（iii）当 $0<a<1$ 时，$g\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$，$g(a)=-2\ln a>0$，当 $x\in(0,\dfrac{a}{2})$ 时，$g(\dfrac{a^2}{16})<0$，

所以 存在唯一 $x_5\in(\dfrac{a^2}{16},\dfrac{a}{2})$，使得 $g(x_5)=0$，

当 $x\in(0,x_5)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$，

当 $x\in(x_5,a)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)<0$；

所以 $x=x_5$ 为 $f(x)$ 的极大值点；

此时 $f(x)$ 在 $x\in(0,a)$ 有一个极值点，不合题意.

综上 a 的取值范围为 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$．