

# 江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科导学案

## 概率和数列的交汇问题

研制人：陈宏强 审核人：鲁媛媛

班级：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 授课日期：3.21-3.22

### 【考情分析】

熟悉概率和数列交汇问题；培养学生逻辑推理、数学建模、数学运算、数据分析等核心素养。

### 【基础训练】

1. 将 1, 2, ..., 9 这 9 个数分成三组，则每组的三个数成等差数列的概率为\_\_\_\_\_。
2. 箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球，黄、白乒乓球的数量比是 1:2，现从箱中每次任意取出一个球，若取出的是黄球则结束，若取出的是白球，则将其放回箱中，并继续从箱中任意取出一个球，但取球的次数最多不超过 10 次，以  $\xi$  表示取球结束时已取到白球的次数，则  $E\xi =$ \_\_\_\_\_。

### 【典例导引】

- 例 1. 某种电路开关闭合后，会出现闪动的红灯或绿灯。已知开关第一次闭和，出现红灯和出现绿灯的概率都是  $\frac{1}{2}$ ，从开关第二次闭和起，若前次出现红灯，则下一次出现红灯的概率是  $\frac{1}{3}$ ，出现绿灯的概率是  $\frac{2}{3}$ ；若前次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率是  $\frac{3}{5}$ ，出现绿灯的概率是  $\frac{2}{5}$ ，记开关第  $n$  次闭合后出现红灯的概率为  $P_n$ 。

(1) 求  $P_2$ ；

(2) 求证：  $P_n < \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$

例 2. (2019 年全国 I 卷) 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物实验. 实验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比实验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮实验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止实验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮实验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为  $\alpha$  和  $\beta$ , 一轮实验中甲药的得分记为  $X$ .

(1) 求  $X$  的分布列;

(2) 若甲药、乙药在实验开始时都赋予 4 分,  $p_i (i=0,1,\dots,8)$  表示“甲药的累计得分为  $i$  时,

最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则  $p_0=0, p_8=1, p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$

( $i=1,2,\dots,7$ ), 其中  $a=P(X=-1), b=P(X=0), c=P(X=1)$ . 假设  $\alpha=0.5,$

$\beta=0.8$ .

(i) 证明:  $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\dots,7)$  为等比数列;

(ii) 求  $p_4$ , 并根据  $p_4$  的值解释这种实验方案的合理性.

**【小结感悟】** 对于解决概率和数列的交汇问题, 你有什么想法?

# 江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科作业

## 概率和数列的交汇问题

研制人：陈宏强 审核人：鲁媛媛

班级：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 时长：60 分钟

1. 抛掷一枚均匀的硬币，出现正面向上（即国徽向上）得 1 分，反面向上得 2 分，记  $P_n$  为得分为  $n$  分的概率。

(1) 求证： 
$$P_{n+2} = \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n$$

(2) 求  $P_n$  的表达式。

2. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球。现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复  $n$  次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为  $X_n$ ，恰有 2 个黑球的概率为  $p_n$ ，恰有 1 个黑球的概率为  $q_n$ 。

(1) 求  $p_1$ ,  $q_1$  和  $p_2$ ,  $q_2$ ;

(2) 求  $2p_n + q_n$  与  $2p_{n-1} + 2q_{n-1}$  的递推关系式和  $X_n$  的数学期望  $E(X_n)$ (用  $n$  表示).

3. 扬州是世界遗产城市、世界美食之都、世界运河之都、东亚文化之都、首批国家历史文化名城和具有传统特色的风景旅游城市，每年来扬州参观旅游的人数不胜数，其中瘦西湖与个园被称为两张名片。为合理配置旅游资源，现对已游览瘦西湖景点的游客进行随机问卷调查，若不游玩个园记 1 分，若继续游玩个园记 2 分，每位游客选择是否游览个园景点的概率均为  $\frac{1}{2}$ ，游客之间选择意愿相互独立。

(1) 从游客中随机抽取 3 人，记总得分为随机变量  $X$ ，求  $X$  的分布列与数学期望；

(2) (i) 若从游客中随机抽取  $m$  人，记总分恰为  $m$  分的概率为  $A_m$ ，求数列  $\{A_m\}$  的前 10 项和；

(ii) 在对所有游客进行随机问卷调查过程中，记已调查过的累计得分恰为  $n$  分的概率为  $B_n$ ，探讨  $B_n$  与  $B_{n-1}$  之间的关系，并求数列  $\{B_n\}$  的通项公式。