

2022~2023 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研(一)

数 学

2023.3

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
A. $\{x | x < 2\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x \leq 1\}$ D. $\mathbf{R}$
2. 两个粒子 A, B 从同一发射源发射出来, 在某一时刻, 它们的位移分别为 $\mathbf{s}_A = (4, 3)$, $\mathbf{s}_B = (-2, 6)$, 则 $\mathbf{s}_B$ 在 $\mathbf{s}_A$ 上的投影向量的长度为
A. 10 B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. 2
3. “绿水青山, 就是金山银山”, 随着我国的生态环境越来越好, 外出旅游的人越来越多. 现有两位游客慕名来江苏旅游, 他们分别从“太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩. 记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚”, 事件 B 为“两位游客选择的景点不同”, 则 $P(B|A) =$
A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{9}{11}$ D. $\frac{10}{11}$
4. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1, 点 O 为底面 ABC 的中心, 球 O 与该正四面体的其余三个面都有且只有一个公共点, 且公共点非该正四面体的顶点, 则球 O 的半径为
A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + \sin x$, 则不等式 $f(2x-1) < e^x$ 的解集是

- A. $(\frac{1+\pi}{2}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1+\pi}{2})$ C. $(0, \frac{1+e^\pi}{2})$ D. $(\frac{1-\pi}{2}, \frac{1+\pi}{2})$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D , $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ADC$ 面积的 3 倍, 则 $\tan B =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{6-\sqrt{3}}{33}$

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 点 P, Q 在直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 上,

$FP \perp FQ$, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OF}^2$, 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 若对任意正整数 n , $S_{n+1} = -3a_{n+1} + a_n + 3$, $S_n + a_n > (-1)^n a$, 则实数 a 的取值范围是

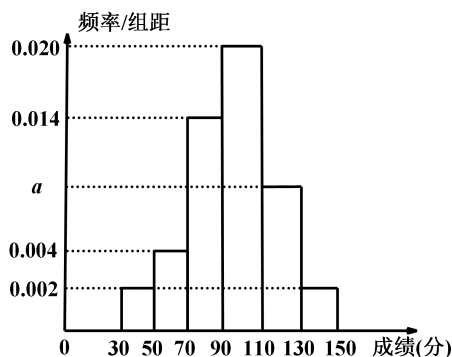
- A. $(-1, \frac{3}{2})$ B. $(-1, \frac{5}{2})$ C. $(-2, \frac{5}{2})$ D. $(-2, 3)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某校 1000 名学生在高三一模测试中数学成绩的频率分布直方图如图所示 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表), 分数不低于 X 即为优秀, 已知优秀学生有 80 人, 则

- A. $a = 0.008$
B. $X = 120$

- C. 70 分以下的人数约为 6 人
D. 本次考试的平均分约为 93.6



(第 9 题图)

10. 已知正数 a, b 满足 $ab = a + b + 1$, 则

- A. $a + b$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$ B. ab 的最小值为 $1 + \sqrt{2}$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$ D. $2^a + 4^b$ 的最小值为 $16\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \cos \omega x$ ($\omega > 0$)，则下列结论正确的有

A. 将函数 $y = 2\sin \omega x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，总能得到 $y = f(x)$ 的图象

B. 若 $\omega = 3$ ，则当 $x \in [0, \frac{2\pi}{9}]$ 时， $f(x)$ 的取值范围为 $[1, 2]$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点，则 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{19}{6}$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$ 上单调递减，则 $1 \leq \omega \leq \frac{16}{5}$

12. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3， E, F 分别是棱 B_1C_1, C_1D_1 上的动点，满足 $D_1F = C_1E$ ，则

A. BF 与 DE 垂直

B. BF 与 DE 一定是异面直线

C. 存在点 E, F ，使得三棱锥 $F - A_1BE$ 的体积为 $\frac{15}{4}$

D. 当 E, F 分别是 B_1C_1, C_1D_1 的中点时，平面 AEF 截正方体所得截面的周长为 $3\sqrt{13} + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案填写在答题卡相应的位置上。

13. $(2 - \frac{1}{x})(x - 2)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 ▲ 。

14. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$ ， BE 与 AD 交于点 O 。若

$\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CA}$ ($x, y \in \mathbf{R}$)，则 $x + y =$ ▲ 。

15. 已知圆 $C: x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ ，过点 $T(2, 0)$ 的直线 l 交圆 C 于 A, B 两点，点 P 在

圆 C 上，若 $CP \parallel AB$ ， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ ，则 $|AB| =$ ▲ 。

16. 已知函数 $f(x) = xe^x - e^x - x$ 的两个零点为 x_1, x_2 ，函数 $g(x) = x \ln x - \ln x - x$ 的两

个零点为 x_3, x_4 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} =$ ▲ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_2 + a_3 + a_4 = 39$ ， $a_5 = 2a_4 + 3a_3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n}{a_n}$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

▲ ▲ ▲

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $1 + \sin 2A = (3 \tan B + 2) \cos 2A$ 。

(1) 若 $C = \frac{3\pi}{4}$ ，求 $\tan B$ 的值；

(2) 若 $A = B$ ， $c = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

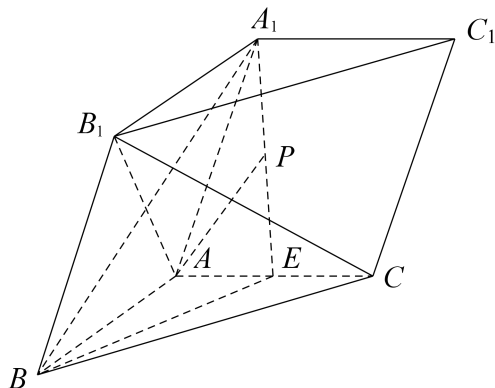
▲ ▲ ▲

19. (12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1B_1BA \perp$ 平面 ABC ，侧面 A_1B_1BA 为菱形， $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$ ， $A_1B \perp AC$ ， $AB = AC = 2$ ， E 是 AC 的中点.

(1) 求证： $A_1B \perp$ 平面 AB_1C ；

(2) 点 P 在线段 A_1E 上（异于点 A_1, E ）， AP 与平面 A_1BE 所成角为 $\frac{\pi}{4}$ ，求 $\frac{EP}{EA_1}$ 的值.



(第 19 题图)

20. (12 分)

某小区有居民 2000 人，想通过验血的方法筛查出乙肝病毒携带者，为此需对小区全体居民进行血液化验，假设携带病毒的居民占 $a\%$ ，若逐个化验需化验 2000 次. 为减轻化验工作量，随机按 n 人一组进行分组，将各组 n 个人的血液混合在一起化验，若混合血样呈阴性，则这 n 个人的血样全部阴性；若混合血样呈阳性，说明其中至少有一人的血样呈阳性，就需对每个人再分别单独化验一次. 假设每位居民的化验结果呈阴性还是阳性相互独立.

(1) 若 $a = 0.2$ ， $n = 20$ ，试估算该小区化验的总次数；

(2) 若 $a = 0.9$ ，每人单独化验一次花费 10 元， n 个人混合化验一次花费 $n + 9$ 元. 求 n 为何值时，每位居民化验费用的数学期望最小.

(注：当 $p < 0.01$ 时， $(1 - p)^n \approx 1 - np$.)



21. (12 分)

已知直线 l 与抛物线 $C_1: y^2 = 2x$ 交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 与抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 交于两点 $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 其中 A, C 在第一象限, B, D 在第四象限.

(1) 若直线 l 过点 $M(1, 0)$, 且 $\frac{1}{|BM|} - \frac{1}{|AM|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求直线 l 的方程;

(2) ① 证明: $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$;

② 设 $\triangle AOB$, $\triangle COD$ 的面积分别为 S_1, S_2 (O 为坐标原点),

若 $|AC| = 2|BD|$, 求 $\frac{S_1}{S_2}$.

▲ ▲ ▲

22. (12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的两个函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, $g(x) = \ln x$.

(1) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的最小值;

(2) 设直线 $y = -x + t$ ($t \in \mathbf{R}$) 与曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 分别交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的最小值.

▲ ▲ ▲