用思维导图解答压轴题 从通法到秒杀讲课比赛获奖作品系列之六

设线设点方法异，同构方程显本质

——2021年全国甲卷理科第20题的探究及推广

◉ 四川省双流中学 文卫星数学生态课堂基地 赵一凡

摘 要：近两年解析几何中考查同结构方程组成为热点，本文用两种方法解答2021年全国甲卷理科第20题都应用了同结构方程组，这种方法可以溯源到教材圆与方程的课后习题，而且这道考题也可以进行推广.

关键词：直线；圆；抛物线；同结构方程组；韦达定理

1 引言

2021年全国甲卷理科第20题是一道解析几何解答题，考生们认为有难度，甚至影响了整个高考数学学科的发挥.事实上，这道考题从题设到解法都类似于2019年全国Ⅲ卷理科数学第21题，并且这道考题可以溯源为一道圆与方程的课后习题，该习题即求圆的切点弦所在直线方程.我们将用两种方法来解答这道考题，其中一种方法通过设直线的方程入手，另一种方法通过设点的坐标入手，但是两种方法都运用了同结构方程组观点，将方程组概括为一个二次方程，进而使用韦达定理整体代入.这道考题的数据比较简单，可以将其推广到更一般的情形.

2 试题解析

2.1 原题再现

抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点在x轴上，直线$l:x=1$交C于P,Q两点，且$OP\perp OQ$.已知点$M(2,0)$，且$\odot M$与l相切.

（1）求抛物线C与$\odot M$的方程；

（2）设A_1,A_2,A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$相切，判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由.

2.2 解法思维导图

分析：本题第（2）小题有一定难度，涉及直线与圆、直线与抛物线的位置关系的判断与应用.可以通过设直线的斜截式方程入手，得到本文的通法；也可以通过设抛物线上的点A_1,A_2,A_3的坐标入手，得到本文的秒杀法，并且坐标既可以设为普通形式，如$A_1(x_1,y_1)$，又可以设为参数形式，如$A_1(t_1^2,t_1)$.

由前面的分析，可得如图1所示的本题解题的思维导图.

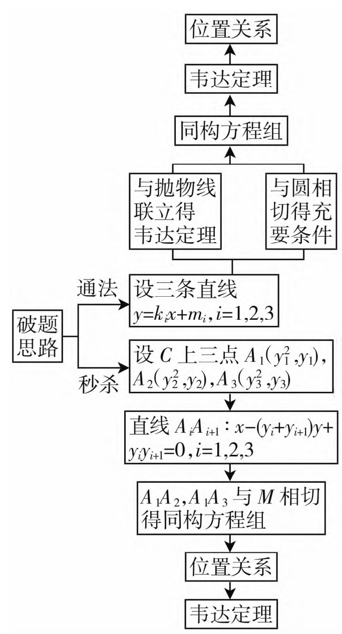

图1

2.3 通法解答

解：（1）易得$C:y^2=x$，$\odot M:(x-2)^2+y^2=1$.

（2）通法.

设点$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$.

情形一，当直线A_1A_2，A_1A_3的斜率不都存在时，可以验证直线A_2A_3与圆M相切.

$\odot M$有且只有两条斜率不存在的切线，即$x=1$和$x=3$.

所以，不妨设$A_1A_2:x=1$，$A_1(1,1)$，此时A_2,A_3中恰有一个存在，另一个不存在，不合题意；

或者设$A_1A_2:x=3$，不妨$A_1(3,\sqrt{3})$，此时A_2,A_3分别为$(0,0)$，$(3,-\sqrt{3})$，即$A_2A_3:x+\sqrt{3}y=0$，圆心$M(2,0)$到直线A_2A_3的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{1+3}}=1$，等于半径，即直线$A_2A_3$与圆$M$相切.

情形二，当直线A_1A_2，A_1A_3的斜率都存在，但A_2A_3的斜率不存在时，由抛物线以及圆的对称性，知

$A_1(0,0)$，此时直线 $A_2A_3: x=3$，与圆 M 相切.

情形三，当直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 的斜率都存在时，分别设为 k_3, k_2, k_1（k_3, k_2, k_1 均不等于 0），此时 y_1, y_2, y_3 任意两者之和不等于 0，并且由情形一、情形二知，还需 $y_1 \neq \pm 1$，且 $y_1 \neq 0$. 同时，设圆心 $M(2,0)$ 到这三条直线的距离分别为 d_3, d_2, d_1.

设代表直线 $l_0: y=kx+m(k\neq 0)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y^2=x. \end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-y+m=0$，当 $\Delta>0$ 时，由韦达定理得方程的两根之和为 $\frac{1}{k}$，两根之积为 $\frac{m}{k}$.

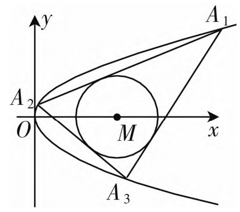

图 2

对于直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3，有

$y_2+y_3=\frac{1}{k_1}, y_2y_3=\frac{m_1}{k_1}$,

即 $k_1=\frac{1}{y_2+y_3}, m_1=\frac{y_2y_3}{y_2+y_3}$; ①

$y_1+y_3=\frac{1}{k_2}, y_1y_3=\frac{m_2}{k_2}$,

即 $k_2=\frac{1}{y_1+y_3}, m_2=\frac{y_1y_3}{y_1+y_3}$; ②

$y_1+y_2=\frac{1}{k_3}, y_1y_2=\frac{m_3}{k_3}$,

即 $k_3=\frac{1}{y_1+y_2}, m_3=\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$. ③

若点 $M(2,0)$ 到直线 l_0 的距离 $d=\frac{|2k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，则 $3k^2+4km+m^2-1=0$.

因为直线 A_1A_2, A_1A_3 与圆 M 相切，所以

$3k_2^2+4k_2m_2+m_2^2-1=0$, ④

$3k_3^2+4k_3m_3+m_3^2-1=0$. ⑤

把 ② 代入 ④，消去 k_2, m_2，得

$(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$. ⑥

把 ③ 代入 ⑤，消去 k_3, m_3，得

$(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$. ⑦

注意到 $y_1\neq\pm 1$，所以 $y_1^2-1\neq 0$.

由 ⑥⑦ 得，y_2, y_3 是关于 y 的二次方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$ 的两根，由韦达定理，得

$y_2+y_3=\frac{2y_1}{1-y_1^2}, y_2y_3=\frac{y_1^2-3}{1-y_1^2}$. ⑧

把 ⑧ 代入 ①，注意到 $y_1\neq 0$，故可得 $\begin{cases} k_1=\frac{1-y_1^2}{2y_1}, \\ m_1=\frac{y_1^2-3}{2y_1}, \end{cases}$ 消去 y_1，得 $3k_1^2+4k_1m_1+m_1^2-1=0$，这等价于直线 A_2A_3 与圆 M 相切.

综上所述，直线 A_2A_3 与圆 M 相切.

2.4 秒杀解法

对于(2)可以用如下秒杀法求解：

圆 M 的切线 A_1A_2, A_1A_3 不能为直线 $x=1$，否则点 A_2, A_3 中恰有一个不存在，从而不合题意，所以点 A_1 不能是 $(1,1),(1,-1)$.

设 $A_1(y_1^2,y_1)(y_1\neq\pm 1), A_2(y_2^2,y_2), A_3(y_3^2,y_3)$，显然，$y_1, y_2, y_3$ 互不相等.

当直线 A_1A_2 的斜率存在时，必有 $y_1+y_2\neq 0$.

斜率 $k_{A_1A_2}=\frac{y_2-y_1}{y_2^2-y_1^2}=\frac{1}{y_2+y_1}$，直线 $A_1A_2: y-y_1=\frac{1}{y_2+y_1}(x-y_1^2)$,

即 $A_1A_2: x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

当直线 A_1A_2 的斜率不存在时，只能是 $A_1A_2: x=3$，此时 $y_1+y_2=0, y_1y_2=-3$.

也有 $A_1A_2: x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

所以 $A_1A_2: x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

因为直线 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切，所以圆心 $M(2,0)$ 到直线 A_1A_2 的距离 $d_3=\frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$,

即 $(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$. ①

同理 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$. ②

由 ①② 知，y_2, y_3 是关于 y 的方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$ 的两根.

由韦达定理，得 $y_2+y_3=\frac{2y_1}{1-y_1^2}, y_2y_3=\frac{y_1^2-3}{1-y_1^2}$.

类似地，可知直线 $A_2A_3: x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$.

圆心 $M(2,0)$ 到直线 A_2A_3 的距离 $d_1=\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}=\frac{\left|2+\frac{y_1^2-3}{1-y_1^2}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{2y_1}{1-y_1^2}\right)^2}}=\frac{|1+y_1^2|}{\sqrt{(1+y_1^2)^2}}=1$，所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切.

2.5 归纳总结感悟

秒杀方法的优势在于：第一，减少了通法中斜率不存在时，需要讨论的情形的个数；第二，直接利用点 A_1, A_2, A_3 的纵坐标 y_1, y_2, y_3 作为直线方程中的系

数，减少了引入的参数的数量，避免了通法中，为了达到消元的目的，反复利用根与系数关系的烦琐过程.

本题的两种解法都运用了同结构方程组，这与 2019 年全国 Ⅲ 卷理科第 21 题第(1) 小题类似，并且 2021 年全国乙卷理科第 21 题同样需用同结构方程组. 可见此方法是近三年高考解析几何考查的热点，事实上此方法可以溯源为教材圆与方程一章中，求圆的切点弦所在直线方程问题.因为圆优美的几何性质，所以教师在教授时，一般把切点弦转化为两圆公共弦，再将两圆方程相减即可，进而忽略了同结构方程组的应用，没有充分挖掘教材习题的育人价值，正因如此，当高考两年前考查过的内容再现时，学生仍然无法迎刃而解.

3 试题推广

3.1 利用伸缩变换的推广

设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，圆 $M:(x-4p)^2+y^2=4p^2$，设 A_1,A_2,A_3 是 C 上的三个点，若直线 A_1A_2,A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切，则直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

证明：由原题知，抛物线 $C_0:y^2=x$，圆 $M_0:(x-2)^2+y^2=1$ 满足上述性质.

因为点与曲线之间的位置关系是伸缩不变量，所以可用伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=2px,\\ y'=2py.\end{cases}(p>0)$ 将抛物线 C_0，圆 M_0 转化为抛物线 C，圆 M，且转化后仍具有上述性质.

由 φ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{x'}{2p},\\ y=\dfrac{y'}{2p},\end{cases}$ 代入 $y^2=x$，得 $\left(\dfrac{y'}{2p}\right)^2=\dfrac{x'}{2p}$，即 $y'^2=2px'$，从而 $C:y^2=2px$，代入 $(x-2)^2+y^2=1$，得 $\left(\dfrac{x'}{2p}-2\right)^2+\left(\dfrac{y'}{2p}\right)^2=1$，即 $(x'-4p)^2+y'^2=4p^2$，从而 $M:(x-4p)^2+y^2=4p^2$.

从而抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，圆 $M:(x-4p)^2+y^2=4p^2$，满足上述性质.

3.2 一般的推广

定义抛物线 Γ 与圆 M 的关联性质 P：若抛物线 Γ 的任意内接三角形 $A_1A_2A_3$ 的两条边 A_1A_2,A_1A_3 与圆 M 相切，则另一条边 A_2A_3 也与圆 M 相切.

抛物线 $\Gamma:y^2=2px(p>0)$ 与圆 $M:(x-m)^2+y^2=r^2$ 具有性质 P 的充要条件是圆方程满足 $r^2=2p(m-r)$，其中 $m>r>0$.

先证明必要性.

由抛物线的对称性，满足性质的圆，其圆心只能在 x 轴的正半轴上，设圆心 $M(m,0)$，半径为 r，考虑圆 M 的两条与 x 轴垂直的切线 AB,CD，分别与抛物线相交于 A,B,C,D(如图 3).

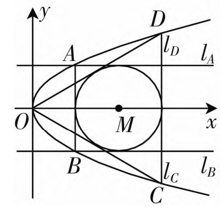

图 3

由抛物线 Γ 与圆 M 具有关联性质 P 知，分别过 A,B 的圆 M 的另一条切线 l_A,l_B 的交点在抛物线上，分别过 C,D 的圆 M 的另一条切线 l_C,l_D 的交点也在抛物线上.

由对称性知，上述交点只能在 x 轴上，但抛物线 Γ 与 x 轴有且只有一个公共点 O，从而必有 $l_A//l_B//x$ 轴，l_C 与 l_D 相交于坐标原点 O.

从而 $A(m-r,r)$，$D\left(m+r,\dfrac{(m+r)r}{\sqrt{m^2-r^2}}\right)$.

又因为 A,D 在抛物线 $y^2=2px$ 上，所以 $\begin{cases}r^2=2p(m-r),\\ \dfrac{(m+r)^2r^2}{m^2-r^2}=2p(m+r).\end{cases}$ 方程组中的两个方程是相同的，即 $r^2=2p(m-r)$.

再证明充分性.

设 $A_1(2pt_1^2,2pt_1)$，$A_2(2pt_2^2,2pt_2)$，$A_3(2pt_3^2,2pt_3)$ 是抛物线 C 上的三点，t_1,t_2,t_3 互不相同.

为了保证直线 A_2A_3 的存在性，类比高考题的秒杀方法，我们知道 $|2pt_1|\neq r$，即 $4pt_1^2-r^2\neq 0$.

则直线 $A_1A_2:(x-2pt_1^2)(2pt_2-2pt_1)=(y-2pt_1)(2pt_2^2-2pt_1^2)$，整理得 $A_1A_2:x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0$，同理 $A_1A_3:x-(t_1+t_3)y+2pt_1t_3=0$，$A_2A_3:x-(t_2+t_3)+2pt_2t_3=0$.

因为直线 A_1A_2 与圆 M 相切，所以圆心 $M(m,0)$ 到直线 A_1A_2 的距离 $d_3=\dfrac{|m+2pt_1t_2|}{\sqrt{1+(t_1+t_2)^2}}=r$，整理得 $(4p^2t_1^2-r^2)t_2^2+4prt_1t_2-r^2(t_1^2+1)+m^2=0$，同理有 $(4p^2t_1^2-r^2)t_3^2+4prt_1t_3-r^2(t_1^2+1)+m^2=0$，所以 t_2,t_3 是方程 $(4p^2t_1^2-r^2)t^2+4prt_1t-r^2(t_1^2+1)+m^2=0$ 的两根，由韦达定理得 $t_2+t_3=-\dfrac{4prt_1}{4p^2t_1^2-r^2}$，$t_2t_3=\dfrac{m^2-r^2(t_1^2+1)}{4p^2t_1^2-r^2}$.

代入圆心 $M(m,0)$ 到直线 A_2A_3 的距离 $d_1=\dfrac{|m+2pt_2t_3|}{\sqrt{1+(t_2+t_3)^2}}$，化简得 $d_1=r$，所以，直线 A_2A_3 与圆 M 相切.