高三数学复习用好教材的三部曲*

福建省邵武第一中学　(354000)　郭胜光

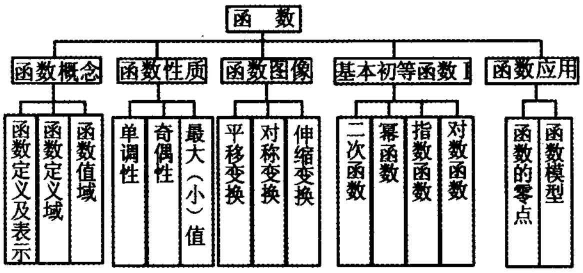
教材是高考试题的主要来源,重视教材的基础性和示范性是高考命题的方向. 纵观目前高三数学复习的状况,基本采用“三轮复习法”,第一轮基础知识和基本技能复习,第二轮是专题复习,第三轮是综合模拟练习. 前二轮就是选定一本教辅材料,按教辅展开复习,第三轮则选择各地的模拟试卷用“题海战术”代替数学教学. 以上三轮复习基本上没有涉及到教材. 即使教研部门和学校年年都在强调高三复习要重视教材,但教师认为教材简单没有什么好讲,学生打开教材看看觉得没什么好做,事实上,很多教师和学生并不是不重视教材,而是不知道如何使用教材,各种数学期刊上也发表了很多关于高三数学复习如何使用教材的文章,这些文章理论谈的多,实际操作说的少. 本人结合自己多年从事高三数学教学的体会,谈谈高三数学复习用好教材的三步曲,供参考.

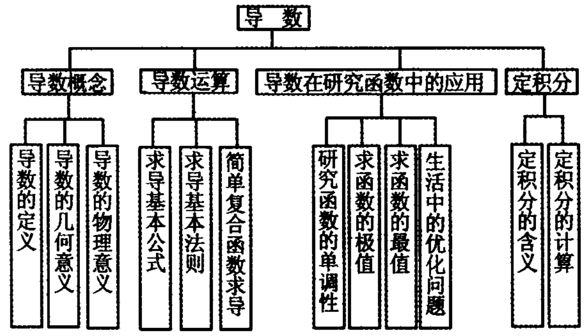
1　将教材呈现的知识形成知识网络

教师要认真钻研教材,用好教材,将教材呈现的知识构建知识网络. 需要注意的是,回归教材并不等于简单重复,而是要站在整体高度审视教材,做到层次分明,结构清晰,让不同领域的知识交汇成为系统. 如教材中基本初等函数,导数及其应用是以单独的版块呈现在必修 1,选修 2 - 2,但有其内在联系,因此,在复习时将分散在教材中的知识构建知识网络.

利用教材梳理知识要防止走形式,要注意展示知识发生、发展过程. 一方面帮助学生查漏补缺,另一方面为学生构建牢固的知识网络,使相关知识在解决数学问题时被有效调用. 比如:复习空间垂直位置关系,可以先让学生回顾教材有关知识点,尔后形成知识链条:直线与直线垂直(定义、判定、性质) → 直线与平面垂直(定义、判定、性质) → 平面与平面垂直(定义、判定、性质).

感悟由线线垂直到线面垂直,再到面面垂直的知识发展过程,以及三种垂直关系之间蕴含的结构联系,从而使学生清晰地认识到:欲证面面垂直需找线面垂直,欲证线面垂直需找线线垂直. 这种完整的知识网络,具有牵一发而动全身的效能,使得大脑的信息容易被具体情境激活.





2　将教材中的特例推广为一般结论

挖掘教材中典型例习题的潜在价值,就是将其推广到一般情形,而得到用途较广的定理、公式,形成相对固定的解题方法,使得一些高考题迎刃而解. 当然,我们不能直接将这些“结论和方法”强加给学生,而是引导学生进行探究性学习,从而自然得出“结论和方法”.

比如,(人教高中《数学》A 版选修 2—1 第 41 页例 3) 设点 A,B 的坐标分别为 $(-5,0)$,$(5,0)$,直线 AM,BM 相交于点 M,且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$,求点 M 的轨迹方程.

高二上新课时已经讲过这道题,因此,在高三复习时,教师首先提出问题 1:设点 A,B 的坐标分别为 $(-a,0)$,$(a,0)$,直线 AM,BM 相交于点 M,且它们的斜率之积是 $-\frac{b^2}{a^2}(a>0,b>0)$,求点 M 的轨迹方程. 当学生得到轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\neq\pm a)$ 后,再请学生探究问题 2:设点 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$

* 本文系福建省教育科学“十二五”规划 2013 年度课题:高质量的课堂教学模式研究(2013XB0359)的阶段性研究成果.

$1(a>b>0)$ 上关于坐标原点 O 对称的两点,点 M 在椭圆上且异于点 A,B,记直线 AM,BM 的斜率分别为 k_1,k_2,问 k_1k_2 是否为定值?

引导学生探究:由题意可设点 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$M(x_0,y_0)$,则 $k_1k_2=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$,因为点 A,B,M 在椭圆上,所以,$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$①,$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$②,① - ② 并化简得 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,则 $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}=$ 定值. 对于双曲线有类似结论.

总结得定理 1:设点 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上关于坐标原点 O 对称的两点,点 M 在椭圆上且异于点 A,B,记直线 AM,BM 的斜率分别为 k_1,k_2,则 $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

例 1 (2011 年高考数学江苏卷第 18 题) 在平面直角坐标系 xOy 中,M,N 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的顶点,过坐标原点的直线交椭圆于 P,A 两点,其中 P 在第一象限,过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 C,连接 AC,并延长交椭圆于点 B,设直线 PA 的斜率为 k.

(Ⅰ)、(Ⅱ) 略;

(Ⅲ) 对任意 $k>0$,求证:$PA\perp PB$.

证明:由题意可设点 $P(x_0,y_0)$,$A(-x_0,-y_0)$,$B(x_1,y_1)$. 记直线 BA,BP 的斜率分别为 k_1,k_2,由定理 1 得 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$,因为点 $C(x_0,0)$,所以 $k_1=\frac{y_0}{2x_0}$,则 $k_2=-\frac{x_0}{y_0}$,又 $k=\frac{y_0}{x_0}$,故 $kk_2=-1$,从而 $PA\perp PB$.

又如,利用课本介绍的"点差法"很容易得到定理 2:直线 PQ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 P,Q 两点,线段 PQ 中点为 A,O 为坐标原点,记直线 PQ,OA 的斜率分别为 k_1,k_2,则 $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$. 对于双曲线有类似结论.

例 2 (2014 年高考数学江西卷理科第 15 题) 过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点,若 M 是线段 AB 的中点,则椭圆 C 的离心率等于________.

解:由题意得直线 OM 的斜率 $k_{OM}=1$,又直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,则由定理 2 得 $1\times(-\frac{1}{2})=-\frac{b^2}{a^2}$,即 $a^2=2b^2=2a^2-2c^2$,则 $a^2=2c^2$,故椭圆离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对于选择题和填空题,我们所得到的"结论和方法"可以直接使用,对于解答题,不宜直接使用,而应把定理推导重写一遍,即使这样也比常规方法简单得多. 教学实践证明,对教材中一些典型例题和习题的结论进行推广,既可以培养学生的探究能力,又可以提高学生高考数学成绩.

3　将通法提升为思想方法

提升学生解题能力是高三数学复习的重要任务,当前,中学所流行的做法是让学生做大量的练习题,企图用题海战术来提升学生解题能力. 多年高考实践表明,平时练过多次的题目,高考只要稍有改造,由于学生没有把握该题型的数学本质,还是败下阵来. 因此,题海战术是不可取的. 正确的做法是将教材中解决一类问题的常规做法即通法,提升为数学思想方法,学生就可以用数学思想方法解决各种数学问题,真正做到以不变应万变. 比如,解答绝对值问题的常用方法就是要分类讨论去掉绝对值符号,再根据题目的其它条件继续解题.

例 3 (2014 年高考数学浙江卷理科第 22 题) 已知函数 $f(x)=x^3+3|x-a|\ (a\in R)$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M(a),m(a)$,求 $M(a)-m(a)$;

(Ⅱ) 设 $b\in R$,若 $[f(x)+b]^2\leqslant 4$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,求 $3a+b$ 的取值范围.

解:对于第(Ⅰ)问,由于函数 $f(x)$ 含有绝对值,就必须分类讨论去掉绝对值,得分段函数,再求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值. 对第(Ⅱ)问只要利用第(Ⅰ)问求出的 $M(a),m(a)$,问题就迎刃而解了.

(Ⅰ) 当 $a\leqslant -1$ 时,$f(x)=x^3+3x-3a$,$x\in[-1,1]$,$f'(x)=3x^2+3>0$,所以 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的增函数,则 $M(a)=4-3a$,$m(a)=-4-3a$,故 $M(a)-m(a)=8$.

当 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)=x^3-3x+3a$,$x\in[-1,1]$,$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\leqslant 0$,所以 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的减函数,则 $M(a)=2+3a$,$m(a)=-2+3a$,故 $M(a)-m(a)=4$.

当 $-1<a<1$ 时,$f(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a, & a\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3-3x+3a, & -1\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$ 由此可知,$f(x)$ 是 $[a,$

1] 上的增函数,且在$[a,1]$上的最大值为$4-3a$,最小值为a^3;$f(x)$是$[-1,a]$上的减函数,且在$[-1,a]$上的最大值为$2+3a$,最小值为a^3;则当$-1<a\leqslant\frac{1}{3}$时,$M(a)=4-3a,m(a)=a^3,M(a)-m(a)=-a^3-3a+4$. 当$\frac{1}{3}<a\leqslant 1$时,$M(a)=2+3a$,$m(a)=a^3,M(a)-m(a)=-a^3+3a+2$.

综上得

$$M(a)-m(a)=\begin{cases}8,a\leqslant -1,\\ -a^3-3a+4,\ -1<a\leqslant\frac{1}{3},\\ -a^3+3a+2,\frac{1}{3}<a<1,\\ 4,a\geqslant 1.\end{cases}$$

(Ⅱ) 若$[f(x)+b]^2\leqslant 4$对$x\in[-1,1]$恒成立$\Leftrightarrow -2\leqslant f(x)+b\leqslant 2$对$x\in[-1,1]$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}M(a)+b\leqslant 2,\\ m(a)+b\geqslant -2.\end{cases}$于是根据(Ⅰ)所求出的$M(a),m(a)$,并结合有关知识易得$3a+b$的取值范围是$[-2,0]$.

可以看出,即使是高考压轴题,用的也是课本中出现的通性通法. 因此,一些最基本的解题策略在高三复习时应高度重视,并通过课本的例题和习题的改造、引申、拓展的教学,使通法提升为思想方法,学生一旦掌握了数学方法,形成了数学思想,提升了数学能力,那么高考数学一定能取得好成绩.

以教学案例研究为载体促进数学教师专业成长*

广东省惠州市第一中学 (516007) 刘志勇

学校发展离不开教师的发展. 在强调教育内涵发展的今天,作为教师专业发展的重要途径,案例研究被赋予了新的使命. 案例研究是教师专业成长的阶梯,是教学理论的故乡,它不仅是集研究、培训、展示为一体的组织性学习,更是以“师本”为基点,帮助教师解决实际问题、提升教育经验、养成专业情感,最终形成有利于教师自主学习的学校文化.

1　教学案例研究有利教师之间的交流

案例研究属于行动研究. 大家通过这一研究过程发现问题、分析问题、解决问题,进而不断调整改进教学设计. 它一方面体现出老师对教学中产生的各种问题或矛盾所展开的研究,另一方面也体现出个人实践反思、同伴合作互助的价值.

审视我们课题中的案例研究过程,我们发现:通过课题组的部分教师代表执教,一课多讲,让其他教师共同参与教学全过程等方式,把老师们置身于共同的、真实的、具体的教学情境之中. 面对共同的话题,使大家有问题可谈,也有内容可写,各种有形成果能水到渠成的自然产生. 如:

案例研究中涉及下列问题: 求函数$y=\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x}$的最大值.

课题组教师之间通过教学交流,在相互讨论研究中每个教师都得到启发,最终形成了丰富多彩的解答:

教师甲: 由原式得$(1-y)\sin x+\cos x=y$,$\therefore\sin(x+\alpha)=\frac{y}{\sqrt{(1-y)^2+1}}$,$\because|\sin(x+\alpha)|\leqslant 1$,$\therefore\frac{|y|}{\sqrt{(1-y)^2+1}}\leqslant 1$,解得$y\leqslant 1$,故$y_{\max}=1$.

教师乙:令$t=\tan\frac{x}{2}$,则$y=\frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+2t-t^2}{1+2t+t^2}$,化为$(1+y)t^2+(2y-2)t+(y-1)=0$,$\Delta=(2y-2)^2-4(y^2-1)\geqslant 0$,解得$y\leqslant 1$. 故$y_{\max}=1$.

教师丙:原式转化为$y=(1-y)\sin x+\cos x$,用柯西不等式得$y^2=[(1-y)\sin x+\cos x]^2\leqslant[(1-y)^2+1^2](\sin^2x+\cos^2x)$,$\therefore y^2\leqslant(1-y)^2+1^2$,解得$y\leqslant 1$. $\therefore y_{\max}=1$.

教师丁:$y=\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x}=1+\frac{\cos x-1}{\sin x+1}$. 令$u=$

* 本文是广东省教育科学“十二五”规划课题《高中数学新课程课堂教学典型案例研究》(课题批准号 2012YQJK192)成果项目之一.