**2023届安徽省、云南省、吉林省、黑龙江省高三下学期2月适应性测试数学试题**

学校:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_考号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、单选题**

1．设，则（    ）

A．i B． C．1 D．

2．设集合，，．若，，则（    ）

A． B． C．1 D．3

3．甲、乙、丙、丁四名教师带领学生参加校园植树活动，教师随机分成三组，每组至少一人，则甲、乙在同一组的概率为（    ）

A． B． C． D．

4．平面向量与相互垂直，已知，，且与向量的夹角是钝角，则（    ）

A． B． C． D．

5．已知点*A*，*B*，*C*为椭圆*D*的三个顶点，若是正三角形，则*D*的离心率是（    ）

A． B． C． D．

6．三棱锥中，平面，．若，，则该三棱锥体积的最大值为（    ）

A．2 B． C．1 D．

7．设函数，在上的导函数存在，且，则当时（    ）

A． B．

C． D．

8．已知*a*，*b*，*c*满足，，则（    ）

A．， B．，

C．， D．，

**二、多选题**

9．已知是定义在上的偶函数，是定义在上的奇函数，且，在单调递减，则（    ）

A． B．

C． D．

10．已知平面平面，*B*，*D*是*l*上两点，直线且，直线且．下列结论中，错误的有（    ）

A．若，，且，则*ABCD*是平行四边形

B．若*M*是*AB*中点，*N*是*CD*中点，则

C．若，，，则*CD*在上的射影是*BD*

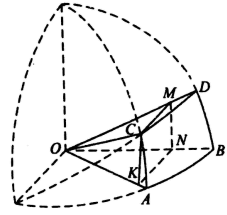
D．直线*AB*，*CD*所成角的大小与二面角的大小相等

11．质点*P*和*Q*在以坐标原点*O*为圆心，半径为1的上逆时针作匀速圆周运动，同时出发．*P*的角速度大小为，起点为与*x*轴正半轴的交点；*Q*的角速度大小为，起点为射线与的交点．则当*Q*与*P*重合时，*Q*的坐标可以为（    ）

A． B．

C． D．

12．下图改编自李约瑟所著的《中国科学技术史》，用于说明元代数学家郭守敬在编制《授时历》时所做的天文计算．图中的，，，都是以*O*为圆心的圆弧，*CMNK*是为计算所做的矩形，其中*M*，*N*，*K*分别在线段*OD*，*OB*，*OA*上，，．记，，，，则（    ）



A． B．

C． D．

**三、填空题**

13．某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布．质量指标介于99至101之间的产品为良品，为使这种产品的良品率达到，则需调整生产工艺，使得至多为\_\_\_\_\_\_\_\_．(若，则)

14．若*P*，*Q*分别是抛物线与圆上的点，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**四、双空题**

15．数学家祖冲之曾给出圆周率的两个近似值：“约率”与“密率”．它们可用“调日法”得到：称小于3.1415926的近似值为弱率，大于3.1415927的近似值为强率．由，取3为弱率，4为强率，得，故为强率，与上一次的弱率3计算得，故为强率，继续计算，……．若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推，已知，则\_\_\_\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_\_\_\_．

**五、填空题**

16．图为一个开关阵列，每个开关只有“开”和“关”两种状态，按其中一个开关1次，将导致自身和所有相邻的开关改变状态．例如，按将导致，，，，改变状态．如果要求只改变的状态，则需按开关的最少次数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**六、解答题**

17．如图，四边形*ABCD*是圆柱底面的内接四边形，是圆柱的底面直径，是圆柱的母线，*E*是*AC*与*BD*的交点，，．



(1)记圆柱的体积为，四棱锥的体积为，求；

(2)设点*F*在线段*AP*上，，求二面角的余弦值．

18．己知函数在区间单调，其中为正整数，，且．

(1)求图像的一条对称轴；

(2)若，求．

19．记数列的前*n*项和为，且．

(1)求数列的通项公；

(2)设*m*为整数，且对任意，，求*m*的最小值．

20．一个池塘里的鱼的数目记为*N*，从池塘里捞出200尾鱼，并给鱼作上标识，然后把鱼放回池塘里，过一小段时间后再从池塘里捞出500尾鱼，表示捞出的500尾鱼中有标识的鱼的数目．

(1)若，求的数学期望；

(2)已知捞出的500尾鱼中15尾有标识，试给出*N*的估计值（以使得最大的*N*的值作为*N*的估计值）．

21．已知双曲线过点，且焦距为10．

(1)求*C*的方程；

(2)已知点，*E*为线段*AB*上一点，且直线*DE*交*C*于*G*，*H*两点．证明：．

22．椭圆曲线加密算法运用于区块链．

椭圆曲线．关于*x*轴的对称点记为．*C*在点处的切线是指曲线在点*P*处的切线．定义“”运算满足：①若，且直线*PQ*与*C*有第三个交点*R*，则；②若，且*PQ*为*C*的切线，切点为*P*，则；③若，规定，且．

(1)当时，讨论函数零点的个数；

(2)已知“”运算满足交换律、结合律，若，且*PQ*为*C*的切线，切点为*P*，证明：；

(3)已知，且直线*PQ*与*C*有第三个交点，求的坐标．

参考公式：

**参考答案：**

1．A

【分析】利用复数的乘法可求运算结果.

【详解】,

故选：A

2．B

【分析】根据包含关系结合交集的结果可求的值.

【详解】因为，故，故或，

若，则，，此时，符合；

若，则，，此时，不符合；

故选：B

3．A

【分析】利用组合可求基本事件的总数，再根据排列可求随机事件含有的基本事件的总数，从而可求对应的概率.

【详解】设“甲、乙在同一组”为事件，

教师随机分成三组，每组至少一人的分法为，

而甲、乙在同一组的分法有，故，

故选：A.

4．D

【分析】设，则由题意得，解出方程，检验即可.

【详解】设，则由题意得，即，

解得或，

设，当时，此时，

又因为向量夹角范围为，故此时夹角为锐角，舍去；

当时，此时，故此时夹角为钝角，

故选：D.

5．C

【分析】首先由题得到，结合，即可求得.

【详解】无论椭圆焦点位于轴或轴，根据点,,为椭圆的三个顶点,

若是正三角形,则，即，即，

即有，则，解得.

故选：C.

6．D

【分析】先利用线面垂直的判定定理与性质定理依次证得平面、与，从而利用基本不等式求得，进而得到，由此得解.

【详解】因为平面，平面，所以，

又，，平面，所以平面，

因为平面，所以，

在中，，，则，

因为平面，平面，所以，

在中，不妨设，则由得，

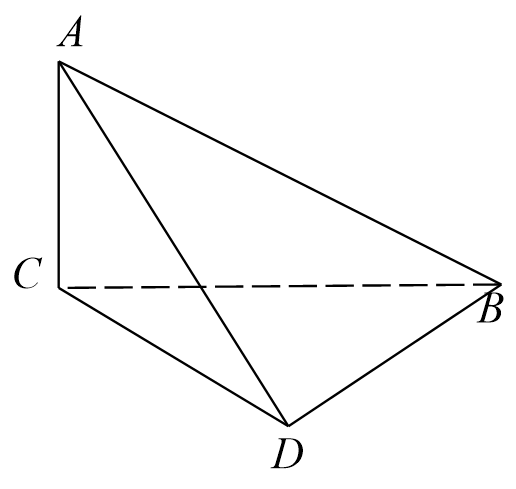
所以，

当且仅当且，即时，等号成立，

所以，

所以该三棱锥体积的最大值为.

故选：D.

.

7．C

【分析】对于AB，利用特殊函数法，举反例即可排除；对于CD，构造函数，利用导数与函数单调性的关系证得在上单调递减，从而得以判断.

【详解】对于AB，不妨设，，则，，满足题意，

若，则，故A错误，

若，则，故B错误；

对于CD，因为，在上的导函数存在，且，

令，则，

所以在上单调递减，

因为，即，所以，

由得，则，故C正确；

由得，则，故D错误.

故选：C.

8．B

【分析】构造函数，利用其单调性，分，，讨论即可.

【详解】由题意得，即，则，则，

令，根据减函数加减函数为减函数的结论知：

在上单调递减，

当时，可得，，两边同取以5为底的对数得

，对通过移项得，

两边同取以3为底的对数得，

所以，所以 ，所以，且，

故此时，，故C,D选项错误，

时，，

，且，故A错误,

下面严格证明当时，，，



根据函数在上单调递增，且，

则当时，有，

，，

下面证明：，

要证：，

即证：，等价于证明，

即证：，此式开头已证明，

对，左边同除分子分母同除，右边分子分母同除得

，

则

故当时，，则

当时，可得，，两边同取以5为底的对数得

，对通过移项得，

两边同取以3为底的对数得，

所以，所以 ，所以，且，

故，故此时，，

下面严格证明当时，，

当时，根据函数，且其在上单调递减，可知

，则，则，

根据函数函数在上单调递增，且，

则当时，，

下面证明：，

要证：

即证：，等价于证，

即证：，此式已证明，

对，左边同除分子分母同除，右边分子分母同除得

，

则，

故时，，则

当时，，则，，

综上，，

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题的关键在于构造函数，利用其单调性及，从而得到之间的大小关系，同时需要先求出的范围，然后再对进行分类讨论.

9．BD

【分析】由奇偶函数的单调性的关系确定两函数的单调性，再结合，逐项判断即可.

【详解】因为是定义在R上的偶函数，是定义在R上的奇函数，且两函数在上单调递减，

所以在上单调递增，在上单调递减，在上单调递减，

所以，，

所以，，，

所以BD正确，C错误；

若，则，A错误.

故选：BD

10．ABD

【分析】由空间中线线、线面及面面关系逐项判断即可得解.

【详解】对于A，由题意，*AB*，*CD*为异面直线，所以四边形*ABCD*为空间四边形*，*不能为平行四边形，故A错误；

对于B，取*BC*的中点*H*,连接*HM*,则*HM*是的中位线，所以，

因为*HM*与*MN*相交，所以*MN*与*AC*不平行，B错误；

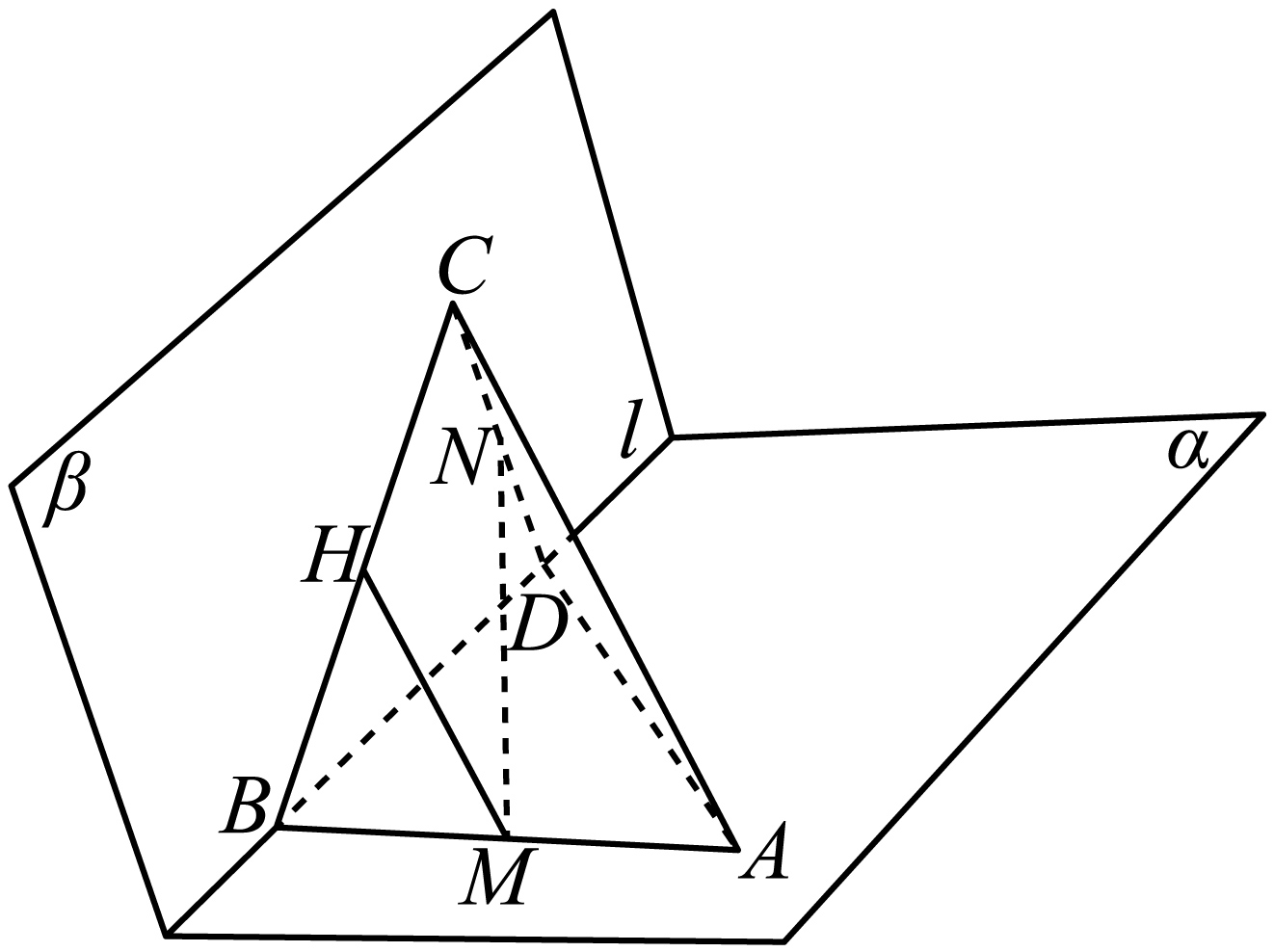
对于C，若，所以由线面垂直的判定可得平面*ABC*，所以，

由结合面面垂直的性质可得，所以点*C*在平面内的投影为点*D*,

所以*CD*在平面内的投影为*BD*，故C正确；

对于D,由二面角的定义可得当且仅当时，直线*AB*，*CD*所成的角或其补角才为二面角的大小，故D错误.

故选：ABD.



11．ABD

【分析】确定点*Q*的初始位置，由题意列出重合时刻*t*的表达式，进而可得*Q*点的坐标，通过赋值对比选项即可得解.

【详解】由题意，点*Q*的初始位置的坐标为，锐角，

设*t*时刻两点重合，则,即，

此时点，

即，

当时，，故A正确；

当时，，即，故D正确；

当时，，即，故B正确.

由三角函数的周期性可得，其余各点均与上述三点重合.

故选：ABD.

12．ACD

【分析】先利用线面垂直的判定定理与性质定理证得，，结合条件中，，从而在各直角三角形中得到的正余弦表示，对选项逐一分析判断即可.

【详解】因为在矩形中，，

又，，面，所以面，

又面，所以，

因为在矩形中，，所以，即，

因为，，，面，

所以面，

又在矩形中，，所以面，

又面，所以，

同时，易知在矩形中，，

对于A，在中，，

在中，，

在中，，

所以，故A正确；

对于B，在中，，

在中，，

又，且在中，为的斜边，则，

所以，故B错误；

对于C，在中，，

在中，，

又，

所以，故C正确；

对于D，在中，，

又，，，

所以，

所以，即，故D正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：本题的突破口是利用线面垂直的判定定理与性质定理证得，，从而得到的正余弦表示，由此得解.

13．##0.5

【分析】根据题意以及正态曲线的特征可知，的解集，即可根据集合的包含关系列出不等式组，从而得解．

【详解】依题可知，，再根据题意以及正态曲线的特征可知，的解集，

由可得，，

所以，解得：，故*σ*至多为．

故答案为：．

14．##

【分析】设点，圆心，的最小值即为的最小值减去圆的半径，求出的最小值即可得解．

【详解】依题可设，圆心，根据圆外一点到圆上一点的最值求法可知，

的最小值即为的最小值减去半径．

因为，，

设，

，由于恒成立，

所以函数在上递减，在上递增，即，

所以，即的最小值为．

故答案为：．

15．     6     

【分析】根据题意不断计算即可解出．

【详解】因为为强率，由可得，，即为强率；

由可得，，即为强率；

由可得，，即为强率；

由可得，，即为强率，所以；

由可得，，即为弱率；

由可得，．

故答案为：6；．

16．5

【分析】根据题意可知，如果要求只改变的状态，只有在以及周边按动开关才可以使按开关的次数最少，利用表格即可分析求出．

【详解】根据题意可知，只有在以及周边按动开关才可以使按开关的次数最少.具体原因如下：

假设开始按动前所有开关闭合，要只改变的状态，在按动（1,1）后，（1,2），（2,1）也改变，

下一步可同时恢复或逐一恢复，同时恢复需按动（2,2），但会导致周边的（2,3），（3,2）也改变，

因此会按动开关更多的次数，所以接下来逐一恢复，沿着周边的开关按动，可以实现最少的开关次数．

如下表所示：（按顺时针方向开关，逆时针也可以）

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 按动 | 开 | 开 | 关 | 开 | 关 | 关 | 关 | 关 | 关 |
| 按动 | 开 | 关 | 开 | 开 | 关 | 开 | 关 | 关 | 关 |
| 按动 | 开 | 关 | 关 | 开 | 开 | 关 | 关 | 关 | 开 |
| 按动 | 开 | 关 | 关 | 开 | 开 | 关 | 开 | 开 | 关 |
| 按动 | 开 | 关 | 关 | 关 | 关 | 关 | 关 | 关 | 关 |

故答案为：5．

【点睛】本题主要考查学生运用所学知识解决知识迁移问题的综合能力，利用表格分析法简单清晰直观．

17．(1)

(2)

【分析】（1）利用平面几何的知识推得，进而得到与，从而利用柱体与锥体的体积公式求得关于的表达式，由此得解；

（2）根据题意建立空间直角坐标系，设，结合（1）中结论与（2）中所给条件得到所需向量的坐标表示，从而求得平面与平面的法向量与，由此利用空间向量夹角余弦的坐标表示即可得解.

【详解】（1）因为与是底面圆弧所对的圆周角，

所以，

因为，所以在等腰中，，

所以，

因为是圆柱的底面直径，所以，则，

所以，则，即，

所以在等腰，，平分，则，

所以，则，

故在中，，，则，

在中，，

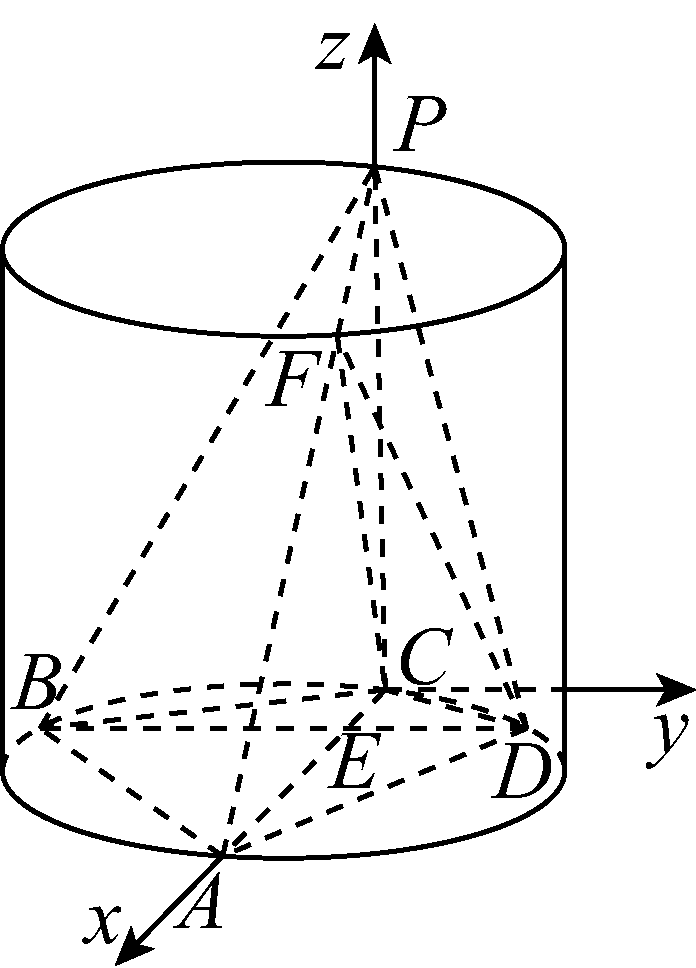
因为是圆柱的母线，所以面，

所以，

，

所以．

（2）以*C*为坐标原点，的方向为*x*轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，



不妨设，则，，，

则，

所以，，，

因为，所以，

则，

设平面的法向量，则，即，

令，则，故，

设平面的法向量，则，即，

令，则，故，

设二面角的平面角为，易知，

所以，

因此二面角的余弦值为．

18．(1)

(2)

【分析】（1）由函数在区间上的单调性确定最小正周期的范围，再由函数值相等即可确定对称轴；

（2）根据对称轴及函数值确定的表达式，再结合最小正周期确定的可能取值，即可得解.

【详解】（1）因为函数在区间单调，

所以函数的最小正周期，

又因为，

所以直线即为图象的一条对称轴；

（2）由（1）知，故，由，得或3．

由为的一条对称轴，所以．

因为，所以或，

若，则，即，

不存在整数，使得或3；

若，则，即，

不存在整数，使得或3．当时，．

此时，由，得．

19．(1)

(2)7

【分析】（1）由数列与的关系可得，再结合等比数列的通项可得解；

（2）利用错位相减法求出，结合范围即可得解.

【详解】（1）因为，所以，

当时，，故，

且不满足上式，

故数列的通项公式为

（2）设，则，

当时，，

故，

于是．

整理可得，所以，

又，所以符合题设条件的*m*的最小值为7．

20．(1)20

(2)6666

【分析】（1）首先求出标鱼占总体的比例，再分析其符合超几何分布，根据超几何分布期望的计算公式即可得到答案.

（2）首先计算出当时，，当时，，

记，计算，从而得到的单调性，最后得到其最大值.

【详解】（1）依题意*X*服从超几何分布，且，

故．

（2）当时，，

当时，，

记，则







．

由，

当且仅当，

则可知当时，；

当时，，

故时，最大，所以*N*的估计值为6666．

21．(1)

(2)证明见解析

【分析】（1）根据题意列方程组求出，即可得出*C*的方程；

（2）根据四点共线，要证即证，设出直线，，，联立直线方程与椭圆方程得出，将其代入，计算结果为零，即证出．

【详解】（1）由题意可得，故，所以*C*的方程为．

（2）设，，

当时，即，解得，则，

双曲线的渐近线方程为，

故当直线与渐近线平行时，此时和双曲线仅有一个交点，

此时直线方程为，

令，则，故．

则直线．

由得，

所以，．





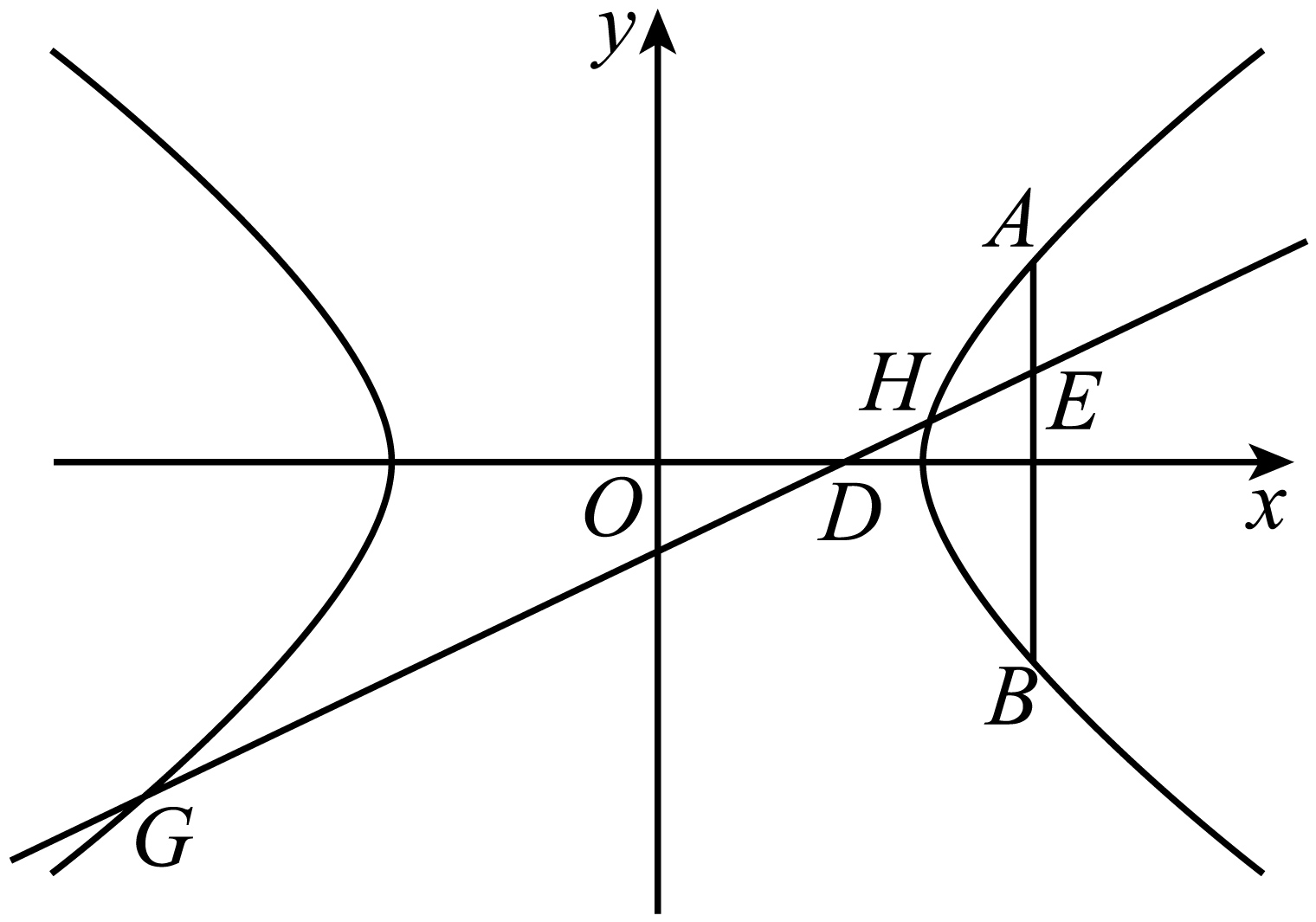




．

所以，所以

即．



【点睛】关键点睛：本题第二问不能直接计算长度，否则计算量过大，而是转化为证明向量数量积之间的关系，采取设，从而得到直线方程，再使用经典的联立法，得到韦达定理式，然后证明即可.

22．(1)见解析

(2)证明见解析

(3)

【分析】（1）利用导数讨论函数的单调性后求出极值，从而可判断零点的个数.

（2）利用“”运算的性质计算后可得证明.

（3）设直线的斜率，利用点在曲线上结合因式分解可求第三个点的坐标.

【详解】（1）由题设可知，有，

若，则，则，此时仅有一个零点；

若，令，解得．

当或时，，当时，，

故在，上为单调递增；

在上单调递减.

因为，

若，则，

此时，而

故此时有2个零点；

若，则，

此时，而

故此时有2个零点；

综上，

当，所以有2个零点．当，所以有2个零点．

当，有，则有1个零点．

（2）因为为*C*在点*P*处的切线，且，所以，

故，故，

因为“”运算满足交换律、结合律，

故，

故.

（3）直线的斜率，设与*C*的第三个交点为，

则，代入得

，

而，

故，

整理得到：，

故即，

同理可得，

两式相减得：，

故，

所以，故，故，

所以，

因此的坐标为：

．

【点睛】思路点睛：函数新运算问题，需根据运算的性质选择合理的计算顺序来处理等式，而三次函数的零点问题，注意结合极值的符号处理零点的个数.