江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期 3 月学情测试

数 学

注意事项：

1. 试卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟。
2. 所有试题必须作答在答题卡上相应的位置，否则答题无效。
3. 答题前，请将自己的姓名、准考证号等信息填涂在答题卡的相应位置。

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求)

1. 已知集合 $A=\{x|x=2k+1，k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|-3<x\leqslant 4\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2. 在复平面内，复数z_1,z_2对应的点分别是$(2,-1),(1,-3)$,则$\frac{z_2}{z_1}$的虚部是(　　)

A.i　　B.$-$i　　C.1　　D. -1

3. 设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=3$”是“直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得至其关，要见次日行里数，请公仔细算相还．”其意思为有一个人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，请问第二天走了(　　)

A．96 里　　B．48 里　　C．192 里　　D．24 里

5. 已知$(x+2)^{2n+1}$的展开式中第二项与第三项的系数之比为$1:8$，则$\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$的展开式中常数项为(　　)

A.-24　　B.24　　C.-48　　D.48

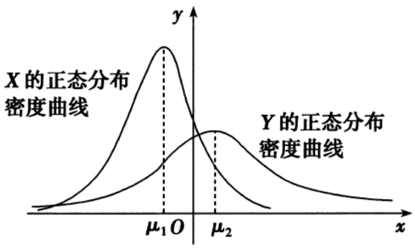
6. 设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,这两个正态分布密度曲线如图所示.下列结论中正确的是(　　)

A.$P(Y\geqslant\mu_2)\geqslant P(Y\geqslant\mu_1)$

B.$P(X\leqslant\sigma_2)\leqslant P(X\leqslant\sigma_1)$

C.对任意正数$t,P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$

D.对任意正数$t,P(X\geqslant t)\geqslant P(Y\geqslant t)$



7. 已知函数$f(x)=|\sin\omega x|+|\cos\omega x|(\omega>0)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$上单调递增,则$\omega$的取值范围是(　　)

A.$\left(0,\frac{1}{4}\right]$　　B.$\left[\frac{1}{4},1\right)$　　C.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{1}{2},1\right)$

8. 已知$a=5,b=15(\ln4-\ln3)$，$c=16(\ln5-\ln4)$，则(　　)

A.$a<c<b$　　B.$c<b<a$　　C..$b<a<c$　　D.$a<b<c$

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分)

9．小王用某款手机性能测试 APP 对 10 部不同品牌的手机的某项性能进行测试，所得的分数按从小到大的顺序(相等数据相邻排列)排列为：81，84，84，87，x，y，93，96，96，99，已知总体的中位数为 90，则(　　)

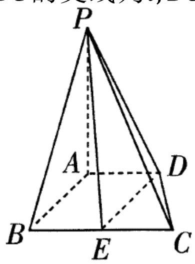
A．$x+y=180$

B．该组数据的均值一定为 90

C．该组数据的众数一定为 84 和 96

D．若要使该总体的标准差最小，则 $x=y=90$

10．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$为等腰梯形，$AD//BC$，$AB=AD=CD=1,BC=PA=2$，记四棱锥$P-ABCD$的外接球为球O，平面PAD与平面PBC的交线为l，BC的中点为E，则(　　)



A.$l//BC$

B.$AB\perp PC$

C.平面$PDE\perp$平面PAD

D.l被球O截得的弦长为 1

11．将函数 $g\left(x\right)=\dfrac{1}{2^{|\omega x-\varphi|}}A\sin\omega x\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$的图象向左平移$\dfrac{\varphi}{\omega}$个单位后得到函数 $y=f\left(x\right)$的图象，若对 $\forall x\in R, f\left(1-x\right)=f\left(x-1\right)$，且$f\left(-1\right)=f\left(3\right)=0$，则$\omega$的可能取值为(　　)

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．π　　C．$\dfrac{3\pi}{2}$　　D．2π

12．在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_2+a_4+a_6=285, na_n=\left(n-1\right)a_{n+1}+101\left(n\in N^*\right)$，则以下结论正确的为(　　)

A．数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列

B．$a_1=99$

C．当S_n取最大值时，n的值为 51

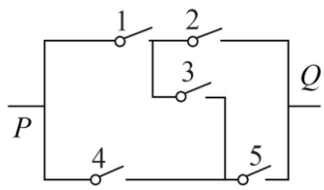
D．当数列$\left\{a_na_{n+1}a_{n+2}\right\}\left(n\in N^*\right)$的前$n$项和取得最大值时，$n$的值为 49 或 51

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 若－1<a＋b<3，2<a－b<4，则 2a＋3b 的取值范围为________.

14. 已知空间向量$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$的模长分别为 1，2，3，且两两夹角均为 60°.点 G 为△ABC 的重心，若$\overrightarrow{PG}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}$，$x$，$y$，$z\in\mathbf{R}$，则 $x+y+z$=________；$|\overrightarrow{PG}|$=__________.

15. 已知如图所示的电路中，每个开关都有闭合、不闭合两种可能，因此 5 个开关共有 2^5 种可能，在这 2^5 种可能中，电路从 P 到 Q 接通的情况有________种.



16. 若存在实数t，对任意的$x\in(0,s]$，不等式$(\ln x-x+2-t)(1-t-x)\leq 0$恒成立，则整数$s$的最大值为________.(参考数据：$\ln 3\approx 1.099,\ln 4\approx 1.386$)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_n=\dfrac{a_n}{2}+n^2+1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1)求 a_1+a_2，并证明 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是等差数列；

(2)求 S_n．

18．(12 分)

在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c. $C=\frac{\pi}{3}$，AB边上的高为$\sqrt{3}$.

(1)若$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长;

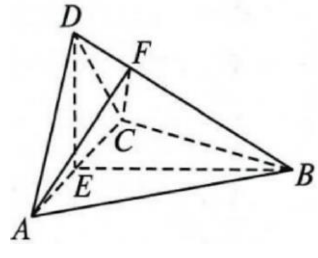
(2)求$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最大值.

19．(12 分)

如图, 四面体$ABCD$中, $AD\perp CD, AD=CD$, $\angle ADB=\angle BDC$, E为AC的中点.

(1)证明:平面$BED\perp$平面ACD;

(2)设$AB=BD=2,\angle ACB=60^\circ$,点$F$在$BD$上,当$\triangle AFC$的面积最小时,求$CF$与平面$ABD$所成角的正弦值.



20．(12 分)

某种电子仪器启动后，屏幕上的 LED 显示灯会随机亮起红灯或绿灯．在仪器启动前，用户可对 p_1（$0<p_1<1$）赋值，且在第 1 次亮灯时，亮起红灯的概率为 p_1，亮起绿灯的概率为 $1-p_1$．随后若第 n（$n\in\mathbf{N}^*$）次亮起的是红灯，则第 $n+1$ 次亮起红灯的概率为 $\dfrac{1}{3}$，亮起绿灯的概率为 $\dfrac{2}{3}$；若第 n 次亮起的是绿灯，则第 $n+1$ 次亮起红灯的概率为 $\dfrac{2}{3}$，亮起绿灯的概率为 $\dfrac{1}{3}$．

(1)若输入 $p_1=\dfrac{1}{2}$，记该仪器启动后，前 3 次亮灯中亮红灯的次数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)在仪器启动后，若某次亮灯为红灯，且亮红灯的概率在区间（$\dfrac{1010}{2021}$，$\dfrac{1}{2}$）内，则仪器会自动发出一次警报声，否则不发声．现输入 $p_1=\dfrac{1}{3}$，则在前 20 次亮灯中，该仪器最多发出多少次警报声？

21．(12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 M、右顶点为 N. ΔOMN (点 O 为坐标原点)的面积为 1，直线 $y=x$ 被椭圆 C 所截得的线段长度为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

(1)椭圆 C 的标准方程；

(2)试判断椭圆 C 内是否存在圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$，使得圆 O 的任意一条切线与椭圆 C 交于 A，B 两点时，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值？若存在，求出圆 O 的方程；若不存在，请说明理由.

22．(12 分)

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x+k}{x}$,$g(x)=2\mathrm{e}^{1-x}+1$,其中k为实数.

(1)求$f(x)$的极值;

(2)若$h(x)=g(x)-f(x)$有 4 个零点,求k的取值范围.

江苏省仪征中学2022-2023学年度第二学期3月学情测试

数学答案

一、单项选择题

1. C　　2. D　　3. C　　4. A　　5.B　　6.C　　7. A　　8.B

二、多项选择题

9. ABD　　10. ABD　　11.AC　　12.ACD

三、填空题(

13. $\left(-\frac{9}{2},\ \frac{13}{2}\right)$　　14. 1; $\frac{5}{3}$　　15.16　　16. 2

四、解答题：

17． (1)解：已知 $S_n=\frac{a_n}{2}+n^2+1$，$n\in\mathbf{N}^*$

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{a_1}{2}+2$，$a_1=4$；当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=\frac{a_2}{2}+5$，$a_2=2$，所以 $a_1+a_2=6$.

因为 $S_n=\frac{a_n}{2}+n^2+1$①，所以 $S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2}+(n+1)^2+1$②.

②−①得，$a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2}-\frac{a_n}{2}+(n+1)^2-n^2$，整理得 $a_n+a_{n+1}=4n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=[4(n+1)+2]-(4n+2)=4$（常数），$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为6，公差为4的等差数列.

(2)由(1)知，$a_{n-1}+a_n=4(n-1)+2=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$.

当 n 为偶数时，$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=\frac{\frac{n}{2}(6+4n-2)}{2}=n^2+n$；

当 n 为奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=4+\frac{\frac{n-1}{2}(10+4n-2)}{2}$

$=n^2+n+2$.

综上所述，$S_n=\begin{cases}n^2+n,当n为偶数时\\ n^2+n+2,当n为奇数时\end{cases}$.

18．解:(1)依题意 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，可得 $c=4$，

因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $ab=8$.　　…3分

由余弦定理得 $a^2+b^2-ab=c^2$，

因此 $(a+b)^2=c^2+3ab=40$，　　…5分

即 $a+b=2\sqrt{10}$.

故△ABC 的周长为 $2\sqrt{10}+4$.　　…6分

(2)由(1)及正弦定理可得

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2b+a}{ab}=\frac{2b+a}{2c}=\frac{2\sin B+\sin A}{\sqrt{3}}$, …8 分

$=\frac{2\sin(\frac{2\pi}{3}-A)+\sin A}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}\sin(A+\theta)}{\sqrt{3}}$，(其中 θ 为锐角，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$) …10 分

由题意可知 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，

因此，当 $A+\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{21}}{3}$. …12 分

19．(1)证明：因为 $AD=CD, E$ 为 AC 的中点,所以 $AC\perp DE$;

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中,因为 $AD=CD, \angle ADB=\angle CDB, DB=DB$,

所以 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,所以 $AB=CB$,又因为 E 为 AC 的中点,所以 $AC\perp BE$; …3 分

又因为 $DE, BE\subset$ 平面 BED, $DE\cap BE=E$,所以 $AC\perp$ 平面 BED,

因为 $AC\subset$ 平面 ACD,所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD. …5 分

(2)解：连接 EF,由(1)知, $AC\perp$ 平面 BED,因为 $EF\subset$ 平面 BED,

所以 $AC\perp EF$,所以 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}AC\cdot EF$,

当 $EF\perp BD$ 时, EF 最小,即 $\triangle AFC$ 的面积最小. …6 分

因为 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,所以 $CB=AB=2$,

又因为 $\angle ACB=60°$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

因为 E 为 AC 的中点,所以 $AE=EC=1, BE=\sqrt{3}$,

因为 $AD\perp CD$,所以 $DE=\frac{1}{2}AC=1$,

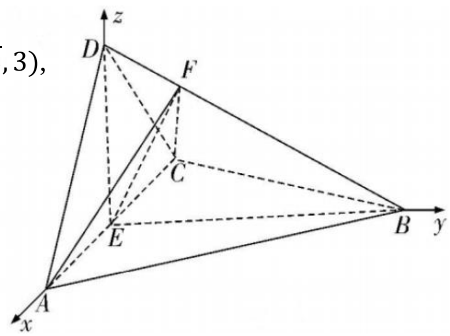
在 $\triangle DEB$ 中, $DE^2+BE^2=BD^2$,所以 $BE\perp DE$.

以 E 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$, ⋯8分

则 $A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), D(0,0,1)$,所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1), \overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,

设平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3},3)$,



又因为 $C(-1,0,0), F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$,所以 $\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CF}|}=\frac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{\frac{7}{4}}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

设 CF 与平面 ABD 所成的角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle|=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. …12 分

20．解：(1)据题意， X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

当 $X=0$ 时，前 3 次亮灯的颜色为“绿绿绿”，则 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

当 $X=1$ 时，前 3 次亮灯的颜色为“红绿绿”，或“绿红绿”，或“绿绿红”，

则 $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

当 $X=2$ 时，前 3 次亮灯的颜色为“红红绿”或“红绿红”或“绿红红”，

则 $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

当 $X=3$ 时，前 3 次亮灯的颜色为“红红红”，则 $P\left(X=3\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$

$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{18}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{18}=\frac{3}{2}$.

(2)记第 n 次亮灯时，亮起红灯的概率为 p_n，由题设，$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+\left(1-p_n\right)\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}$

则 $p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$ 因为 $p_1=\frac{1}{3}$

则 $p_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$，所以 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{6}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列.

则 $p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，所以 $p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

由 $p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n<0$，所以 n 为奇数.

由 $p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n>\frac{1010}{2021}$，得 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n>-\frac{1}{2021}$

因为 n 为奇数，则 $\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2021}$，即 $3^n>2021$，则 $n\ge 7$.

当 $n\le 20$ 时，$n=7$，9，11，13，15，17，19.因为仪器在这 7 次亮灯中亮红灯是随机事件，所以在前 20 次亮灯中，该仪器最多发出 7 次警报声.

21．解：（1）由题意知 $M(0,b)$，$N(a,0)$，由 $\frac{1}{2}ab=1$，得 $ab=2$ ①.

设直线 $y=x$ 与椭圆 C 交于点 $P\left(x_0,x_0\right)$，$Q\left(-x_0,-x_0\right)$，则 $|PQ|^2=8x_0^2$.

把 $P\left(x_0,x_0\right)$ 代入椭圆方程，得 $x_0^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，

故 $|PQ|^2=\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}=\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2$，即 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$ ②.

由①②，解得 $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=1\\b^2=4\end{cases}$ (舍去)，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）假设存在这样的圆 O，设 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda$.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$.

故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\left(1+k^2\right)x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2=\left(1+k^2\right)\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+km\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right)+m^2=$

$\frac{5m^2-4k^2-4}{1+4k^2}=\lambda$ ③.

由$r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，得$r^2=\frac{m^2}{1+k^2}$ ④.

由③④，得$\lambda=\frac{\left(5r^2-4\right)\left(k^2+1\right)}{1+4k^2}$，当 λ 与 k 无关时，$\lambda=0$，$r^2=\frac{4}{5}$，

即圆 O 的半径为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

当直线 AB 的斜率不存在时，若直线 AB 的方程为$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

将其代入椭圆 C 的方程，得$A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$B\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，

此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

若直线 AB 的方程为$x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，同理可得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

综上，存在满足题意的圆 O，其方程为$x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

22．解:(1)因为$f(x)=\frac{\ln x+k}{x},x\in(0,+\infty)$,

所以$f'(x)=\frac{-\ln x+1-k}{x^2}$,令$f'(x)>0$,解得$0<x<\mathrm{e}^{1-k}$,令$f'(x)<0$,解得$x>\mathrm{e}^{1-k}$, …2 分

所以$f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{1-k})$上单调递增,在$(\mathrm{e}^{1-k},+\infty)$上单调递减, …3 分

所以$f(x)$在$x=\mathrm{e}^{1-k}$处取得极大值,即$f(x)_{极大值}=f(\mathrm{e}^{1-k})=\mathrm{e}^{k-1}$,无极小值. …4 分

(2)由$h(x)=0$即$\frac{\ln x+k}{x}-(2\mathrm{e}^{1-x}+1)=0$,可得$2x\mathrm{e}^{1-x}+x-\ln x-k=0$,

令$F(x)=2x\mathrm{e}^{1-x}+x-\ln x-k$,则$F'(x)=(1-x)\left(2\mathrm{e}^{1-x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{(1-x)(2x-\mathrm{e}^{x-1})}{x\mathrm{e}^{x-1}}$, …5 分

设$p(x)=2x-\mathrm{e}^{x-1}$,则$p'(x)=2-\mathrm{e}^{x-1}$,由$p'(x)>0$得$0<x<\ln2+1$,

由$p'(x)<0$得$x>\ln2+1$,

所以$p(x)$在$(0,\ln2+1)$上单调递增,在$(\ln2+1,+\infty)$上单调递减, …6 分

且$p(1)=1,p(3)=6-\mathrm{e}^2<0,p\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}-\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}}<0$,即$p\left(\frac{1}{5}\right)p(1)<0,p(1)p(3)<0$,

所以存在$x_1\in\left(\frac{1}{5},1\right),x_2\in(1,3)$使得$p(x_1)=0,p(x_2)=0$,即$2x_1=\mathrm{e}^{x_1-1},2x_2=\mathrm{e}^{x_2-1}$①,

故$F(x)$在$(0,x_1)$上单调递减,在$(x_1,1)$上单调递增,在$(1,x_2)$上单调递减,在$(x_2,+\infty)$上单调递增,

故$F(x)$的极大值为$F(1)=3-k$,极小值为$F(x_1)$和$F(x_2)$. …8 分

对①式两边取对数可得$\ln x_1=x_1-1-\ln2,\ \ln x_2=x_2-1-\ln2$②,

将①②代入$F(x_1)$得

$F(x_1)=2x_1\mathrm{e}^{1-x_1}-\ln x_1+x_1-k=\mathrm{e}^{x_1-1}\mathrm{e}^{1-x_1}-(x_1-1-\ln2)+x_1-k=2+\ln2-k$,

同理可得$F(x_2)=2+\ln2-k$,

要使$F(x)$有四个零点,则必有$\begin{cases}F(x_1)=F(x_2)=2+\ln2-k<0\\F(1)=3-k>0\end{cases}$,解得$2+\ln2<k<3$,

…10 分

而$F(\mathrm{e}^{-3})=2\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-3}}+\mathrm{e}^{-3}-\ln\mathrm{e}^{-3}-k>3-k>0$,

$F(5)=10\mathrm{e}^{-4}-\ln5+5-k>5-\ln5-k>2-\ln5>0$,

由零点存在定理可知,当$2+\ln2<k<3$时$F(x)$有且仅有 4 个零点,即$h(x)$有 4 个零点,

所以实数k的取值范围为$(2+\ln2,3)$. …12 分