放缩法与数列不等式的证明

班级______ 姓名______ 日期______ 评价_______

类型 1 关于数列项的不等式证明

1. 已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列,$a_1=b_1=1,a_2=b_2>0$,且$a_1\neq a_2,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)若a_2,b_3,a_3成等差数列,求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)当$n>2$时,证明:$a_n<b_n$.

2. (2022•连云港六校联考)在正项数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=\frac{9}{16},a_{n+1}=a_n+\left(\frac{a_n}{n+1}\right)^2$.

(1)确定数列$\{a_n\}$的单调性,并求出a_n的最小值;

(2)证明:对任意$n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_n\leqslant\frac{n}{n+1}$成立.

类型２　先求和再放缩证明不等式

3. (2022•江西重点中学联盟联考)设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$为各项均为正数的等比数列,

且$a_1 = b_1 = 1, a_6 = 3b_2$,再从条件①$a_5 = 5(a_4 - a_3)$;②$b_5 = 4(b_4 - b_3)$;③$S_8 = 6S_3$这三个条件中选择一个作为已知,解答下列问题:

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n = \frac{1}{S_n}$,数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n,求证:$T_n < 2$.

4. (2022•重庆质检)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + 1, n \in \mathbf{N}^*$.

(1)证明:数列$\{S_n + 1\}$为等比数列;

(2)设$b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$,数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$,证明:$T_n < 1$.

类型 3 先放缩再求和证明不等式

5. (2022•衡阳一模)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_1 = 3, S_n = 1 + a_{n+1}$.

(1)证明:数列$\{S_n - 1\}$为等比数列;

(2)记数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$,证明:$T_n < 1$.

6. (2022•福建质检)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_1 = 1, a_2 = 2$,且$S_{n+2} = S_{n+1} + 4a_n$.

(1)求a_n;

(2)求证:$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} < 2$.

类型 4　利用数列的单调性证明不等式

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$,其前n项和为S_n,若$S_3=12$,且$2a_1,a_2,1+a_3$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$,且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$,证明:$\frac{1}{4}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{3}{2},a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明:数列$\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$为等差数列,并求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$c_n=\frac{a_n}{n\cdot 2^n}$,记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$,求证:$\frac{3}{4}\leqslant T_n<1$.