以探索性思维导学培养学生的有“度”思维

——以高三数列二轮复习课为例

马喜君[1]， 赵琴学[2]

(1. 元济高级中学,浙江 海盐　321004;2. 海盐高级中学,浙江 海盐　321004)

摘　要:以生为本发展学科核心素养是 2017 版新课标和新教材的核心内容,是国家对未来人才培养的方向性指导意见. 核心素养、有“度”思维、探索能力是高三课堂“学、教、评”的集中交汇点. 高三的数学课堂更加重概念、重本质、重思维、重素养,二轮复习更讲究高效、精准,优策略,抓本质,因此需要突破一些固有的模式. 文章在教师探索性思维导学的指引下,以培养学生思维广度、思维角度、思维深度、思维高度的有“度”思维为目标,对激发学生探索能力、提升学生思辨能力、培育学生核心素养进行初步探究.

关键词:思维导学;有“度”思维;探索性

中图分类号:O122. 4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003-6407(2022)04-0035-05

纵观历年的浙江省数学高考试题,具有新颖、灵活、概念的理解性强、重本质等特点,对学生核心素养的要求很高,因此对高三课堂的教学提出了重概念、重本质、重思维、重素养的高要求. 高三二轮复习讲究的是高效、精准,优策略,抓本质. 如果二轮复习仅仅以基本知识、方法为线索,穿插例题分析的固定微专题模式,也许能比较系统地解决一类问题,但是缺乏对学生的自主思维、数学学科素养的培养,也就是如果遇到新颖、灵活、概念性强的题目,学生缺乏自主思考、分析的能力,很难找到解题的突破口. 因此高三二轮复习是要突破固定的课堂教学方式,采取在教师思维导学的指引下以培养学

实现了课堂小结的作用,效果较好,值得借鉴和提倡(详见文献[2]).

改进　上述 4 种小结方式给人一种缺少“授之渔”的感觉,如果执教教师能够结合本节课性质定理的学习,引导学生在“量一量”“猜一猜”“验一验”“证一证”的过程中体会数学思维的严谨性,进而形成严谨求实的必备品格,体现学科的德育价值就更好了.

对学生“学”的影响　本环节关键在于培养学生“颗粒归仓”的意识,教师对小结环节的精心设计和高度重视,有利于学生实现“知识、技能、思想、经验”的自我建构. 久而久之,学生就会进行自主构建知识网络,将“新知识”纳入“原有知识”体系,同时重点反思“问题解决过程中存在什么困难? 我是如何解决的”等内省性问题,从而实现高阶思维的培育,为深度学习奠定基础.

5　结语

教无定法,教必有法. 我们以“平行四边形的性质(第 1 课时)”为例,从课堂引入、实验探究、例题处理、课堂小结这 4 个维度进行了初步的比较与评价,从教师“教”的角度构建了指向核心素养培育的初中数学课堂教学质量的评价体系,取得了初步成效. 接下来我们将围绕学生的“学”,构建指向核心素养发展的初中数学课堂教学质量评价体系,任重而道远,欢迎更多的一线教师积极参与进来,为初中数学课堂教学质量的提升贡献一份自己的力量.

参　考　文　献

[1]　刘东升. 承前启后:一种“生长式”的课题小结:以李庚南老师的课例为例[J]. 中学数学教学参考(中旬),2014(11):8-10.

[2]　于彬. 前后照应:一种“点睛式”的课题结构[J]. 中小学数学(初中版),2016(3):1-2.

收文日期:2021-10-07;修订日期:2021-11-03

作者简介:马喜君(1979—),男,浙江海盐人,中学高级教师. 研究方向:数学教育.

生有“度”思维为目的的学生自主探究型课堂教学. 下面以高三数列二轮复习课为例,对探索性思维导学在课堂教学中培养学生思维广度、思维角度、思维深度、思维高度这 4 个角度进行初步探究.

1　框图式知识网络梳理,拓展学生的思维广度

大单元中知识框架就如人体的骨骼,是支撑整个知识模块的核心知识,为学生设计知识与方法相结合的思维导图,为学生构建完整、系统的知识网络,从整体上把握基础知识及技能,为进一步探究高精尖的问题打好基础. 框图式知识网络具有直观性、系统性等特征,有助于学生明确该知识模块需要掌握的知识技能的同时,还能清楚地了解该知识点可以解决的问题类型、处理方式与方法等.

例如对于求和可分为三大方向:通项公式可知型、通项公式未知需放缩型、数学归纳型. 数列求和的知识网络可以梳理如下:

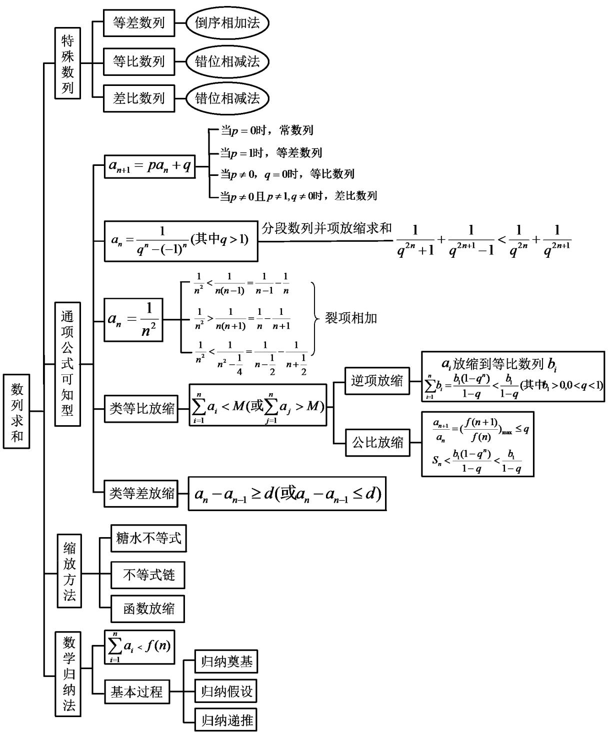

图 1

熟悉了以上的知识网络,学生遇到求和便可以从头脑中搜索出主要的解决策略,同时能分辨出各种不同方法适用的条件以及限用的要求等,可以快速地制定出解题路径,很大程度上避免“雷区”,节约时间,优化解题过程. 因此通过对框图式知识网络的梳理,可以拓展学生的思维广度、思维面,让知识有联系地形成记忆进行存档,便于“搜索”. 对于交汇知识的梳理将知识网络模块化、个性化的同时更趋于联系化、整体化,有效地帮助学生应对综合性问题的考查.

2　探索性问题导学引领,开拓学生的思维角度

传统的二轮复习课以解决一个专题为主,是一种完全按照剧本演练的实践操作,并不能满足对学生核心素养的培养要求,因此需要改善这种固化的教学方式,在二轮复习课中按照制定好的教学目标,教师要敢于以问题做引导,鼓励学生自主探究研究方向,在不断完善和进阶的研究过程中,从本质上考查学生对知识的理解,同时开阔学生的思维角度,将逻辑推理、数学运算、数据分析等素养落实到位.

2.1　开放性问题,引导学生发散思维

我们所碰到的问题基本都是完整的题干、固定的条件、明确的求解,即使解法是多样化的,思维也都是被框死在一个区域内的,因此一题只能解决一个或一类,最多是一个区块的问题,并不能真正达到触类旁通的效果. 解决问题若缺少思维的可变性、多样性,则会影响学生对所学知识和思想方法的理解和掌握,学习效率大打折扣,因此我们要以开放性问题作为引导学生思维的驱动力,放飞禁锢的思想,这样往往会得到意想不到的收获.

探究 1　若$\{b_n\}$为等比数列,$b_1=1$,公比$q>0$,且$b_1+b_2=6b_3$,你能提出什么问题? 先想一想,然后与同伴交流.

生 1:我们可以通过解方程求出公比$q=\frac{1}{2}$,从而可以研究等比数列$\{b_n\}$的通项公式、前n项和、数列的单调性、最值、图像等.

生 2:还可以求前n项积的最值以及此时n的取值.

师:如果将题中的条件“公比$q>0$”改为“公比$q<0$”,那么我们还可以研究其他什么问题呢?

生 3:如果$b_1=1$,$q<0$,那么该数列为摆动数列,我们可以根据数列的图像研究数列的收敛情况.

探究 2　在探究 1 的条件下,若$c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中$c_n\neq 0$,$n\in\mathbf{N}^*$,你能提出有关数列$\{c_n\}$的一些问题吗?

生 4:可以求$\{c_n\}$的通项公式和前n项和.

生 5:要求$\{c_n\}$的通项公式,还需要知道c_1的值,不妨设$c_1=1$,则可求得$c_n=4^{n-1}$.

当特殊数列的基本量确定之后,数列便是确定的,可以多角度去研究此数列,可以增添不同的条件,从而达到不同的考查效果.

2.2　结构不良性问题,引领学生理解本质

2020 年山东省数学高考卷出现了结构不良试题,这引起了各方重视. 结构不良试题具有界定不明确、结构不完整、逻辑断层等特征,是一个考查学生发散性思维的有效平台,是一种考查学生灵活变通能力和知识迁移能力的高效方式,也是一种能较好地评价学生核心素养的新题型. 教师如果平时在课堂教学中重视结构不良问题的设置,让学生通过对已有条件和所求解结果的运算、推理、反思、联想等活动,预设解决问题需要增加的条件,这就需要理解问题的本质,才可能得到多种条件,产生多种解题方法和途径.

探究 3　已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$满足 $a_1=b_1=c_1$,$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$,若数列$\{b_n\}$满足______,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

生 6:若$\{b_n\}$是常数列,则$\{c_n\}$是等比数列,便可以用累加法求出$\{a_n\}$的通项公式.

生 7:若$\{b_n\}$是等比数列,则$\{c_n\}$也是等比数列,同理也可以用累加法求出$\{a_n\}$的通项公式.

生 8:若$\{b_n\}$是等差数列,则可以用累乘法求出$\{c_n\}$的通项公式,还可以用累加法求出$\{a_n\}$的通项公式.

生 9:其实无论$\{b_n\}$是什么数列,只要它的每一项都是非零实数,都可以用累乘法求出$\{c_n\}$的通项公式,再用累加法求出$\{a_n\}$的通项公式.

……

全班学生一片哗然,生 4 道出了题目的本质:若$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=f(n)$,$a_{n+1}-a_n=g(n)$,则可以用累乘法求得$\{c_n\}$的通项公式,用累加法求得$\{a_n\}$的通项公式.

由此可见,教师借助结构不良试题,引领学生分析、推理、联想以及进行同伴间的合作、互助,从而产生多维度的思考空间,开拓了思维角度,拓展了思维广度,还能从本源出发,理解题目背景以及考查的知识点,让本来不明确的开放性问题,为学生展示出一种豁然开朗的境界. 这种思维的训练,远比灌输式的知识方法教学高效得多.

3　类比型变式教学探究,挖掘学生的思维深度

变式教学是学科教学中培养学生高阶思维能力的重要路径. 变式的有效设计与运用能促进深度学习的开展[1]. 类比型变式主要分两种类型,即同构型(题目条件、结论等结构类似型)变式和同源型(数学本质相类似型)变式. 通过类比型变式的教学,逐步引导学生探究问题的本源,挖掘思维的深度,以此培养学生对数学的理解能力、探究能力、应用能力,落实学生逻辑推理、数学运算、数学抽象等核心素养.

3.1　同构型变式,深化知识纵向发展

同构型变式一般从改变、优化条件或结果入手,通过对比分析,挖掘并便于学生理解知识本质,从而达到深度教学的效果.

探究 4　在探究 3 的基础上,如何更改已知条件,求数列$\{a_n\}$的通项公式?

生 10:将“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”改为“$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}c_n$,$c_n=b_{n+1}-b_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”. 同样可以用累加、累乘法求得数列$\{a_n\}$的通项公式.

生 11:将“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”改为“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}-c_n=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”.

生 12:将“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”改为“$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}c_n$,$c_{n+1}-c_n=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”.

生 13:将“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”改为“$c_n=a_{n+1}-a_n$,$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=b_{n+2}-b_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$”.

……

师:根据这几位同学的思路分为 4 个小组,请大家商量一下,看看如何赋予数列条件,使得题目能完整、正确地求解?

学生参与同构变形,有助于他们对知识点的进阶理解. 同构变形不仅能系统地掌握累加法、累乘法的含义及其具体运算过程,而且还能通过推理得出各种变式下符合题意的适用条件,以高阶的思维角度认识累加法、累乘法,加强学生对知识的本源理解,深化对知识的认知.

3.2　同源型变式,加强知识横向联系

波利亚说过:“教师的首要职责之一是不要给

学生以下错觉,即数学题目之间很少有联系,和任何其他事物则完全没有什么联系."[2] 同源型变式是指数学本质一致或类似的变式.通过同源型变式的探究分析,可以帮助学生通过对比不同的条件、不同的知识点,拨开题目本身的"伪装",更清楚地寻找到相同或相类似的数学本质,找到相同本源下各知识点之间千丝万缕的联系,使知识交汇点在知识网络中扩大其交汇的作用,以提高学生数学综合运用技能和素养.

探究 5 已知 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$),证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{3}{2}$.

分析 由 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}\leqslant\dfrac{1}{3^{n-1}}$,可得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}<\frac{3}{2}.$$

变式 1 已知 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$),证明:不等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{13}{10}$.

分析 由 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}\leqslant\dfrac{1}{5\cdot 3^{n-2}}$(其中 $n\geqslant 2$),可得 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{1}{3^1}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-2}}\right)<\dfrac{13}{10}$.

变式 2 已知 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$,)证明:不等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{243}{190}$.

分析 由 $a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}\leqslant\dfrac{1}{19\cdot 3^{n-3}}$(其中 $n\geqslant 3$),可得 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{19}\left(\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{1}{3^1}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-3}}\right)<\dfrac{243}{190}$.

此类同源型,基于同源题根、目标精度不等提升的进阶变式,可以提升学生自主辨析思维的能力,结合数列求和放缩的特点,理性把握放缩的"跨度"与"起点",达到思维进阶、挖掘深度的目的.

探究 6 已知数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 满足 $a_1=b_1=c_1=1$,$c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}c_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

1)若 $\{b_n\}$ 为等比数列,公比 $q>0$,且 $b_1+b_2=6b_3$,求 q 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

2)若 $\{b_n\}$ 为等差数列,公差 $d>0$,证明:$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<1+\dfrac{1}{d}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2020 年浙江省数学高考试题第 20 题)

变式 3 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$,且 $a_3+a_4+a_5=28$,a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$,数列 $\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2+n$.

1)求 q 的值;

2)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2018 年浙江省数学高考试题第 20 题)

看似完全没关系的两道题,其本质都是求通项公式,而它们呈现的形式是完全不同的.探究 6 是借助累加法、累乘法实现了 3 个数列之间的关联,而互相钳制的嵌套关联使题目变得错综复杂,如果没有发现其本质特征,那么就无法理清思路,很难找到解题的突破口.变式 3 的本质有很大的隐蔽性,要突破已知 S_n 求 a_n、累加法、错位相减法等重重障碍,才能看清目标,在有限的解题时间内,如何做到迅速理清思路,设计运算策略,这就需要教师平时对学生进行本源型变式的训练,让学生通过揭示数学的本质寻找它们之间的共通点以及区别,提高学生逻辑推理以及数学抽象能力.

4 回归性数学本质提炼,提升学生的思维高度

在课堂小结时,通过问题式思维导学的探究,学生不仅掌握了特殊数列——等差、等比数列的基本量求解,通项公式的求解方法以及前 n 项和的求解方法等基础知识,而且学生通过自主探究各种通项公式的求解方法、前 n 项和的求解方法所适用的特征与要求以及通项公式与前 n 项和的关联,站在数学本质的高度,归纳提炼知识,提高了学生的思维高度.从根源上寻找解题方向,让考题千变万化,让学生拥有以不变应万变的思维高度,从而让素养教育真正落地.

5 综合性问题导学突破,推进学生"四度"进阶

对学生数学学科素养的评价,落脚于对综合问题的处理,挖掘数学本质,看透数学背景,在数学学科核心素养的顶层设计下,研究解题策略、总结方法、归纳思辨,养成思维的生产、辨析、归纳、延伸,用合理的数学方法突破问题.

探究 7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$),记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

S_n,则　　(　　)

A. $\frac{3}{2}<S_{100}<3$　　B. $3<S_{100}<4$

C. $4<S_{100}<\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{2}<S_{100}<5$

(2021 年浙江省数学高考试题第 10 题)

分析 1　利用数列单调性放缩. 由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$,得 $a_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n$,从而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{1+\sqrt{a_n}}<1,$$

故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 即 $\sqrt{a_{n+1}}<\sqrt{a_n}$. 又 $a_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n$,可得

$$a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}=\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})}{\sqrt{a_n}}<2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}),$$

故　$S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}<1+2\sqrt{a_1}-2\sqrt{a_{100}}<3.$

由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\geqslant\frac{1}{2}a_n$,可得 $a_n\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,从而

$$S_{100}>1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}=2-\frac{1}{2^{99}}>1.82.$$

分析 2　由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$,可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}<\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

可知　$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2},$$

从而　$$\frac{1}{\sqrt{a_n}}\leqslant\frac{n+1}{2},$$

即　$$a_n\geqslant\frac{4}{(n+1)^2},$$

于是　$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\leqslant\frac{a_n}{1+\frac{2}{n+1}}=\frac{n+1}{n+3}a_n,$$

故　$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{n+1}{n+3}.$$

累乘可得　$$a_n\leqslant\frac{6}{(n+1)(n+2)}=6\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

因此　$$S_{100}\leqslant1+\frac{1}{2}+6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=3.$$

分析 3　利用函数图像、切线进行放缩. 令 $b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\geqslant1$,则

$$b_{n+1}^2=b_n^2+b_n,$$

设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+x}$,其中 $x\geqslant1$,由切线放缩可知

$$x+\sqrt{2}-1\leqslant f(x)<x+\frac{1}{2},$$

从而　$$b_n+\sqrt{2}-1\leqslant b_{n+1}<b_n+\frac{1}{2},$$

于是　$$b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\geqslant1+(\sqrt{2}-1)(n-1).$$

因此　$$a_n\leqslant\left[\frac{1}{(\sqrt{2}-1)n+(2-\sqrt{2})}\right]^2=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\cdot\frac{1}{(n+\sqrt{2})^2}<(\sqrt{2}+1)^2\cdot\frac{1}{\left(n+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\left(n+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)},$$

故　$$S_{100}\leqslant1+(\sqrt{2}+1)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}-\frac{1}{100+\sqrt{2}+\frac{1}{2}}\right)<3.$$

数学教学是数学思维活动的教学. 在教师探索性思维导学的指引下,基于问题、有效设计、动态生成,在师生与生生对话、思考、讨论、质疑、共鸣中,实现“以生为本”的思辨、归纳、拓展、延伸的思维进阶,引领学生拓展思维广度、开拓思维角度、挖掘思维深度、提升思维高度,即进行有“度”思维,激发学生的探索能力,提升学生的思辨能力,培育学生的数学核心素养[3].

参　考　文　献

[1]　花奎,丁良栋. 数学思想作引领　变式探究促深度:一道三角形面积最值问题的变式教学及思考[J]. 中学教研(数学),2020(12):1-6

[2]　波利亚. 怎样解题:数学教学法的新面貌[M]. 涂泓,冯承天,译. 上海:上海科技教育出版社,2002.

[3]　郑萍. 核心素养视角下培养学生的有“度”思维:以函数、方程、不等式单元复习课为例[J]. 中学教研(数学),2020(3):30-33.