班级______ 姓名________ 日期________ 评价_________

平面向量的最值与范围问题

平面向量中的最值与范围问题，是高考的热点与难点问题，主要考查求向量的模、数量积、夹角及向量的系数等的最值、范围．解决这类问题的一般思路是建立求解目标的函数关系，通过函数的值域解决问题，同时，平面向量兼具“数”与“形”的双重身份，数形结合也是解决平面向量中的最值与范围问题的重要方法．

考点一　求参数的最值(范围)

例 1．(1)在正六边形 $ABCDEF$ 中，点 G 为线段 DF(含端点)上的动点，若$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CB}+\mu\overrightarrow{CD}(\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是________．

(2)设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，若$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且不等式$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$对任意 θ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为(　　)

A．$[-1,3]$　　B．$[-1,5]$　　C．$[-7,3]$　　D．$[5,7]$

练习 1． 在$\triangle ABC$ 中，M 为 BC 边上任意一点，N 为线段 AM 上任意一点，若$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是(　　)

A.$\left[0，\frac{1}{3}\right]$　　B.$\left[\frac{1}{3}，\frac{1}{2}\right]$　　C．$[0,1]$　　D．$[1,2]$

考点二　求向量模、夹角的最值(范围)

例 2　(1)已知 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 满足：$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})\cdot(\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{e})=0$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|$的最大值为(　　)

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

(2)在平行四边形 $ABCD$ 中，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{2\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\lambda\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|},\lambda\in[\sqrt{2},2]$，则 $\cos\angle BAD$ 的取值范围是________．

练习 2.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$，若向量 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda+\mu=1，\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{c}|$的最大值为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

考点三　求数量积的最值(范围)

例 3.(1)已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$的最大值为(　　)

A.$\dfrac{1}{4}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D.$\dfrac{3}{2}$

(2)已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60°$，点 P 在 BC 边上(包括端点)，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是________.

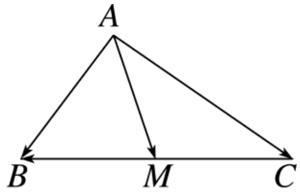
练习 3.已知 AB 是半圆 O 的直径，$AB=2$，等腰$\triangle OCD$ 的顶点 C，D 在半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上运动，且$\angle COD=120°$，点 P 是半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上的动点，则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$的取值范围为(　　)

A.$\left[-\dfrac{3}{4}，\dfrac{3}{4}\right]$　　B.$\left[-\dfrac{3}{4}，1\right]$　　C.$\left[-\dfrac{1}{2}，1\right]$　　D.$\left[-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}\right]$

向量极化恒等式及其它

平面向量基本定理及数量积是高考考查的重点，很多时候需要用基底代换，运算量大且复杂，用向量极化恒等式、等和(高)线求解，能简化向量代换，减少运算量，使题目更加清晰简单．

考点一　向量极化恒等式



极化恒等式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2$.

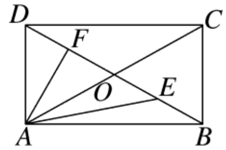
变式：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}{4}-\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}{4}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}{4}-\dfrac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}{4}$.

(2)如图，在△ABC 中，设 M 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2$.

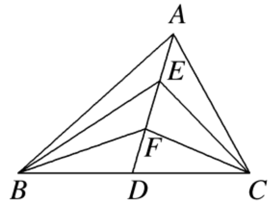
考向 1　利用向量极化恒等式求值

例 1.　(1)如图所示，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=4\sqrt{5}$，$AD=8$，E，O，F 为线段 BD 的四等分点，

则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________.



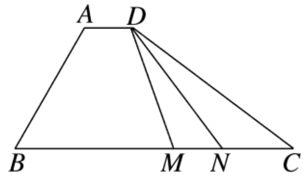
(2)如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E，F 是 AD 上的两个三等分点．$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值为________.



考向 2　利用向量极化恒等式求最值、范围

例 2.(1)已知 AB 是圆 O 的直径，AB 长为 2，C 是圆 O 上异于 A，B 的一点，P 是圆 O 所在平面上任意一点，则$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值是________.

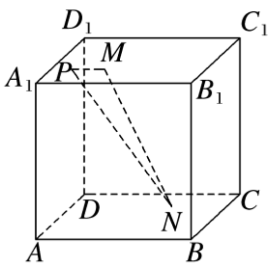
(2)平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为________.



练习 1.　(1)如图，在四边形 $ABCD$ 中，$B=60°$，$AB=3$，$BC=6$，且$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，则实数 λ 的值为________；

若 M，N 是线段 BC 上的动点，且$|\overrightarrow{MN}|=1$，则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$的最小值为________.

(2)如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦)，P 为正方体表面上的动点，当弦 MN 的长度最大时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的取值范围是________.



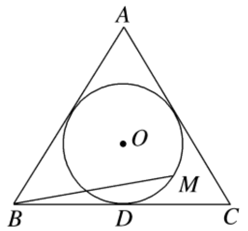
考点二　等和(高)线解基底系数和(差)问题

等和(高)线:平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP'}$，$\overrightarrow{OP'}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，若点$P'$在直线$AB$上或在平行于$AB$的直线上，则$\lambda+\mu=k$(定值)；反之也成立，我们把直线$AB$以及与直线$AB$平行的直线称为等和(高)线.

例3.(1)在△ABC中，M为边BC上任意一点，N为AM的中点，$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，则$\lambda+\mu$的值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D．1

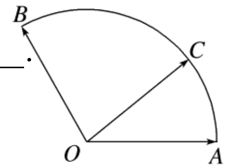
(2)如图，圆O是边长为$2\sqrt{3}$的等边△ABC的内切圆，其与BC边相切于点D，点M为圆上任意一点，$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}(x，y\in\mathbf{R})$，则$2x+y$的最大值为(　　)



A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$

C．2　　D．$2\sqrt{2}$

练习2.　给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，如图所示，点C在以O为圆心的$\overset{\frown}{AB}$上运动，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x，y\in\mathbf{R})$，则$x+y$的最大值是________.



考点三　平面向量与三角形“四心”

例4.（1）已知在△ABC中，G是重心，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$56a\overrightarrow{GA}+40b\overrightarrow{GB}+35c\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，则$B=$________.

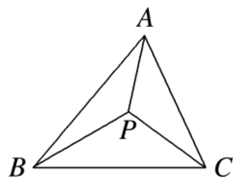
（2）已知点P是△ABC的外心，且$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，$C=\frac{2\pi}{3}$，则$\lambda=$________.

（3）在△ABC中，$AB=2$，$AC=3$，$BC=4$，O为△ABC的内心，若$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$，则$3\lambda+6\mu$的值为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

（4）已知H是△ABC的垂心，若$\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，则$A=$________.

练习3.设点P在△ABC内部且为△ABC的外心，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，如图.



若△PBC，△PCA，△PAB的面积分别为$\frac{1}{2}$，x，y，则$x+y$的最大值是______.