江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科导学案
概率、离散型随机变量的概率分布与期望、方差

研制人：杨芳英　　审核人：陈宏强

班级：____________姓名：____________学号：________授课日期：

【考情分析】

古典概型、离散型随机变量的分布列、均值与方差是高考的热点题型,常与排列、组合等知识综合命题,以实际问题为背景考查离散型随机变量的均值与方差在实际问题中的应用.概率统计解答题每年必考,是高考考查数学应用的主要阵地,高考主要考查概率的计算、随机变量的分布列及期望与方差的应用、正态分布、用样本估计总体、统计案例等,概率统计解答题难度一般为中等或中等偏难.注重与数列、不等式、函数、导数等知识的综合考查,是高考的主要命题方向.

【真题感悟】

1.(2022 新高考全国Ⅰ卷)从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数,则这 2 个数互质的概率为(　　)

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{2}{3}$

2.(2021 全国甲卷)将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行,则 2 个 0 不相邻的概率为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{2}{5}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{4}{5}$

3.(2021 新高考全国Ⅰ卷)有 6 个相同的球,分别标有数字1,2,3,4,5,6,从中有放回地随机取两次,每次取 1 个球,甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”,乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”,丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”,丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”,则(　　)

A.甲与丙相互独立　　B.甲与丁相互独立　　C.乙与丙相互独立　　D.丙与丁相互独立

4.(2022 浙江卷)现有 7 张卡片,分别写上数字1,2,2,3,4,5,6.从这 7 张卡片中随机抽取 3 张,记所抽取卡片上数字的最小值为ξ,则$P(\xi=2)=$________,$E(\xi)=$____________.

【典例导引】

例 1.(1)(2021 湖南师大附中模拟)电视机的使用寿命与显像管开关的次数有关,某品牌的电视机的显像管开关了 10000 次还能继续使用的概率是0.8,开关了 15000 次后还能继续使用的概率是0.6,则已经开关了 10000 次的电视机显像管还能继续使用到 15000 次的概率是(　　)

A.0.20　　B.0.48　　C.0.60　　D.0.75

(2)(2022 全国甲卷·理科)从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 则这 4 个点在同一个平面的概率为__________.

（3）(2022 天津耀华中学二模)某专业资格考试包含甲、乙、丙 3 个科目,假设小张甲科目合格的概率为$\frac{3}{4}$, 乙、丙科目合格的概率均为$\frac{2}{3}$,且 3 个科目是否合格相互独立.设小张 3 科中合格的科目数为X,则$P(X=2)=$________;$E(X)=$ __________.

例 2.(2022 全国甲卷·理科)甲、乙两个学校进行体育比赛,比赛共设三个项目,每个项目胜方得 10 分,负方得 0 分,没有平局.三个项目比赛结束后,总得分高的学校获得冠军.已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5, 0.4, 0.8,各项目的比赛结果相互独立.

(1)求甲学校获得冠军的概率;

(2)用X表示乙学校的总得分,求X的分布列与期望.

例 3.(2022 江苏徐州市铜山区模拟)甲、乙两人进行围棋比赛,约定先连胜两局者直接赢得比赛,若赛完 5 局仍未出现连胜,则判定获胜局数多者赢得比赛,假设每局甲获胜的概率是$\frac{2}{3}$,乙获胜概率是$\frac{1}{3}$.

(1)求甲恰好在第四局获胜的概率;

(2)记X表示比赛决出胜负时的总局数,求X的分布列与期望.

例 4. (2022 新高考全国 I 卷)一医疗团队为了研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组)，同时在末患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组)，得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1)能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2)从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$与$\frac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

①证明：$R=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$;

②利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\overline{B})$的估计值，并利用①的结果给出 R 的估计值.

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第二学期高三数学学科作业

概率、离散型随机变量的概率分布与期望、方差

研制人： 杨芳英　　审核人：陈宏强

班级：____________ 姓名：_____________学号：_________时长：60 分钟

1.(2022 全国甲卷·文科)从分别写有1,2,3,4,5,6的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张,则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为(　　)

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{2}{5}$　　D.$\frac{2}{3}$

2.(2021 福建漳州市三模)投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏.晋代在广泛开展投壶活动中,对投壶的壶也有所改进,即在壶口两旁增添两耳.因此在投壶的花式上就多了许多名目,如“贯耳(投人壶耳)".每一局投壶,每一位参赛者各有四支箭,投入壶口一次得 1 分,投入壶耳一次得 2 分.现有甲、乙两人进行投壶比赛(两人投中壶口、壶耳是相互独立的),甲四支箭已投完,共得 3 分,乙投完 2 支箭,目前只得 1 分,乙投中壶口的概率为$\frac{1}{3}$, 投中壶耳的概率为$\frac{1}{5}$. 四支箭投完,以得分多者赢. 则乙赢得这局比赛的概率为(　　)

A.$\frac{13}{75}$　　B.$\frac{3}{75}$　　C.$\frac{8}{15}$　　D.$\frac{8}{75}$

3.(2021 广东深圳市二模)某中学开展“学习宪法知识, 弘扬宪法精神”的主题知识竞赛活动, 甲同学答对第一道题的概率为$\frac{2}{3}$, 连续答对两道题的概率为$\frac{1}{2}$. 用事件A表示“甲同学答对第一道题”, 事件B表示“甲同学答对第二道题”,则$P(B\mid A)=$ (　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{3}{4}$

4.(2022 深圳模拟)已知随机变量X的分布列为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

若$P(X^2<x)=\frac{11}{12}$,则实数x的取值范围是(　　)

A.$4\leqslant x\leqslant 9$　　B.$4<x\leqslant 9$　　C.$4\leqslant x<9$　　D.$4<x<9$

5.(多选题)设离散型随机变量X的分布列如下表:

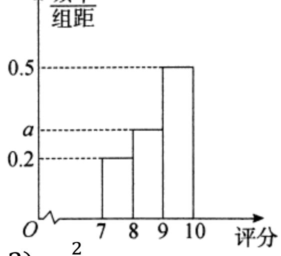
X	1	2	3	4	5
P	m	0.1	0.2	n	0.3

若离散型随机变量$Y=-3X+1$,且$E(X)=3$,则(　　)

A.$m=0.1$　　B.$n=0.1$　　C.$E(Y)=-8$　　D.$D(Y)=-7.8$

6.(多选题)(2021 山东烟台市一模)某学校举行文艺比赛,比赛现场有 5 名专家教师评委给每位参赛选手评分,每位选手的最终得分由专家教师评分和观看学生评分确定.某选手参与比赛后,现场专家教师评分情况如下表.观看学生全部参与评分,所有评分均在$7\sim10$之间,将评分按照$[7,8),[8,9),[9,10]$分组,绘成频率分布直方图如图,则下列说法正确的是(　　)

现场专家教师评分表					
专家教师	A	B	C	D	E
评分	9.6	9.5	9.6	8.9	9.7



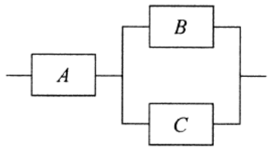
A.$a=0.3$

B.用频率估计概率,估计观看学生评分不小于 9 分的概率为$\frac{1}{2}$

C.从 5 名专家教师中随机选取 3 人,X表示评分不小于 9 分的人数,则$P(X=2)=\frac{2}{5}$

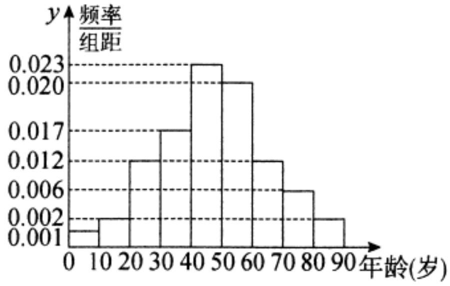
D.从 5 名专家教师中随机选取 3 人,X表示评分不小于 9 分的人数,则$P(X=3)=\frac{2}{5}$

7.(2021 福建厦门市二模)如图,某系统使用A,B,C三种不同的元件连接而成,每个元件是否正常工作互不影响.当元件A正常工作且B,C中至少有一个正常工作时系统即可正常工.作.若元件A,B,C正常工作的概率分别为0.7,0.9,0.8,则系统正常工作的概率为________.



8.盒中有 4 个球,其中 1 个红球, 1 个绿球, 2 个黄球.从盒中随机取球,每次取 1 个,不放回,直到取出红球为止.设此过程中取到黄球的个数为ξ,则$P(\xi=0)=$________,$E(\xi)=$ ________.

9.(2022 新高考全国 II 卷)在某地区进行流行病调查,随机调查了 100 名某种疾病患者的年龄,得到如下的样本数据频率分布直方图.



(1)估计该地区这种疾病患者的平均年龄(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2)估计该地区一人患这种疾病年龄在区间$[20,70)$的概率;

(3)已知该地区这种疾病的患病率为0.1%,该地区年龄位于区间$[40,50)$的人口占该地总人口的16%,从该地区任选一人,若此人年龄位于区间$[40,50)$,求此人患该种疾病的概率.(样本数据中的患者年龄位于各区间的频率作为患者年龄位于该区间的概率,精确到0.0001)

10. (2021 年全国新高考 I 卷)某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束.A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分，已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1)若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

(2)为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

11. (2021 北京卷)为加快新冠肺炎检测效率,某检测机构采取“k合 1 检测法”,即将k个人的拭子样本合并检测,若为阴性,则可以确定所有样本都是阴性的;若为阳性,则还需要对本组的每个人再做检测.现有 100 人,已知其中 2 人感染病毒.

(1)①若采用“10 合 1 检测法”,且两名患者在同一组,求总检测次数;

②已知 10 人分成一组,分 10 组,两名感染患者在同一组的概率为$\frac{1}{11}$,定义随机变量X为总检测次数,求检测次数X的分布列和数学期望$E(X)$;

(2)若采用“5 合 1 检测法”,检测次数Y的期望为$E(Y)$,试比较$E(X)$和$E(Y)$的大小(直接写出结果).