2020年全国Ⅰ卷解析几何试题的探讨

——高考中二次曲线系方程的应用

■河南省孟津县第一高级中学　聂晓红

高考试题是学科学习中丰富而宝贵的资源，研究和分析高考试题对于把握高考试题的命题趋势，提高同学们的学习效率具有十分重要的作用。2020年高考全国Ⅰ卷解析几何题，若利用曲线系思想来解决，不仅可以简化运算过程，而且从一定程度上还能探究到这些试题命制源泉，下面是笔者的一些粗浅看法，仅供同学们参考。

二次曲线的理论支撑：在平面内，由二元二次方程 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 所表示的曲线，叫作二次曲线。在高中阶段它包括圆、椭圆、双曲线、抛物线以及退化的二次曲线——两条直线。

曲线系方程

设这两个二次曲线的方程分别为 $S_1=0$，$S_2=0$，其中 S_1，S_2 均为二次式，则 $\lambda S_1+\mu S_2=0$ 表示所有经过这两个曲线交点的二次曲线，即二次曲线系。

如果能确定你需要的曲线不是 $S_1=0$ 或 $S_2=0$ 本身，我们可以只设一个参数。

下面我们用二次曲线系的理论来研究2020年全国Ⅰ卷第20题。

例1 （2020全国Ⅰ卷理数第20题）如图1，已知 A、B 分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，G 为上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与椭圆 E 的另一交点为 C，PB 与椭圆 E 的另一交点为 D。

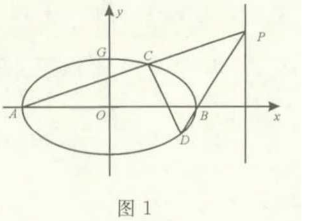

图1

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点。

解析：（1）椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$。过程略。

（2）A，B，C，D 四点共椭圆，考虑运用二次曲线方程来解决。

设 $P(6,m)$，直线 CD：$x=ty+n$，则四条直线 CD，AB，PA，PB 分别为：CD：$x=ty+n$，AB：$y=0$，PA：$y=\frac{m}{9}(x+3)$，PB：$y=\frac{m}{3}(x-3)$。

过 A，B，C，D 四点的二次曲线方程为 $\left(y-\frac{m}{9}x-\frac{m}{3}\right)\left(y-\frac{m}{3}x+m\right)+\lambda(x-ty-n)y=\mu\left(\frac{x^2}{9}+y^2-1\right)$。

因为该二次曲线是椭圆，所以 xy 项系数必为0，其余项系数对应相等。

则 xy 项系数：$-\frac{m}{3}-\frac{m}{9}+\lambda=0$；①

y 项系数：$m-\frac{m}{3}-\lambda n=0$。②

由①②可知 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{9}m,\\ \lambda n=\frac{2}{3}m\end{cases}$，即 $n=\frac{3}{2}$。

直线 CD 的方程为 $x=ty+\frac{3}{2}$，恒过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

赏析了2020年高考试题，我们对二次曲线系方程的应用进行总结：

二次曲线系方程 $\lambda S_1+\mu S_2=H$，当我们已知曲线 $H=0$ 时，需要求某一些未知数的值时，可以利用方程 $\lambda S_1+\mu S_2=0$ 两边对比系数即可。

具体步骤如下：

1. 在曲线（$H=0$）上找四个点（四条直线），这四个点为两个二次曲线的交点；

2. 确定第二个曲线（椭圆、圆、双曲线等），构造过四点的二次曲线系方程；

3. 对比两边对应项的系数，找出未知数的值或等量关系。

例 2 （2016 年山东卷文数）如图 2，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$。

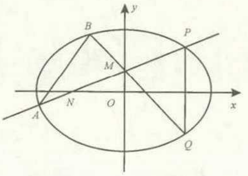

图 2

（1）求椭圆 C 的方程。

（2）过动点 $M(0,m)(m>0)$ 的直线交 x 轴与点 N，交椭圆 C 于点 A，P（P 在第一象限），且 M 是线段 PN 的中点。过点 P 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于点 Q，延长 QM 交椭圆 C 于点 B。

①设直线 PM，QM 的斜率分别为 k_1，k_2，证明：$\frac{k_2}{k_1}$ 为定值；

②求直线 AB 的斜率最小值。

解析：（1）椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，过程略。

（2）① $\frac{k_1}{k_2}=-3$，过程略。

② A,B,P,Q 四点共椭圆，所以考虑二次曲线系方程。

设直线 AB 为 $y=kx+n$，PA：$y=k_1x+m$，PQ：$x=x_0$，QB：$y=-3k_1x+m(k_1>0)$。

则过 A,B,P,Q 四点的二次曲线方程为：

$(kx-y+n)(x-x_0)+\lambda(y-k_1x-m)\cdot(y+3k_1x-m)=\mu\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-1\right)$。

xy 项的系数：$-1+2\lambda k_1=0$；①

x^2 项的系数：$k-3\lambda k_1^2=\frac{\mu}{4}$；②

y^2 项的系数：$\lambda=\frac{\mu}{2}$。③

由①③可知 $\mu=2\lambda$，$\lambda=\frac{1}{2k_1}$。

代入②，得到 $k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k_1}+3k_1\right)$。

因为 $k_1>0$，所以 $k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k_1}+3k_1\right)\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$，当且仅当 $k_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 取等号。故 $k_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

例 3 （2011 年四川卷文数）如图 3，过点 $C(0,1)$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆与 x 轴交于两点 $A(a,0)$，$B(-a,0)$，过点 $C(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于另一点 D，并与 x 轴交于点 P，直线 AC 与 BD 交于点 Q。

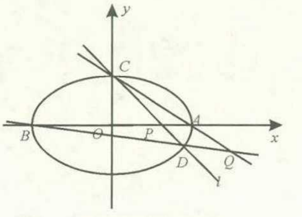

图 3

（1）当直线 l 过椭圆的右焦点时，求线段 CD 的长；

（2）当点 P 异于点 B 时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值。

解析：（1）椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$|CD|=\frac{16}{7}$，过程略。

（2）易知直线 l 的斜率存在且不为 0，设为 $y=kx+1$，AB：$y=0$，AC：$x+2y-2=0$，BD：$x=ty-2$。

则过 A,B,C,D 四点的二次曲线方程为：

$y(kx-y+1)+\lambda(x+2y-2)(x-ty+2)=\mu\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)$。

xy 项的系数：$k-\lambda t+2\lambda=0$；①

y 项的系数：$1+4\lambda+2t\lambda=0$。②

由①②可知，$k=\frac{2-t}{2(t+2)}$。

易知 $P\left(-\frac{1}{k},0\right)$，$Q\left(\frac{2(t-2)}{t+2},\frac{4}{t+2}\right)$，即 $Q\left(-4k,\frac{4}{t+2}\right)$。

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4$，为定值。

由以上几道高考试题可以看出，每一个高考试题都值得我们研究和剖析，并且要从不同的角度去探究，整合一些思想方法并加以运用，这在高考的备考复习当中有着十分重要的意义。

（责任编辑　徐利杰）