学号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线

# 2023 届高三年级第一次模拟考试(二)

# 数　学

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

**一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid y=\log_2(x-a)\}$,若 $A\subseteq B$,则实数 $a$ 的取值范围为 (　　)

A. $[3,+\infty)$　　B. $[-1,3]$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,-1]$

2. 已知复数 $z$ 满足 $(1-\mathrm{i})z=3-\mathrm{i}$,则 $z$ 的虚部为 (　　)

A. 1　　B. $-1$　　C. $\mathrm{i}$　　D. $-\mathrm{i}$

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,已知 $a_1=3$,$S_6=3S_3$,则 $a_7$ 等于 (　　)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 48

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|$,则 $|\boldsymbol{a}|$ 等于 (　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 12　　C. $\sqrt{2}$　　D. 3

5. 设 $a=\dfrac{2}{\log_2 3}$,$b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.2}$,$c=\sin\dfrac{1}{2}$,则 $a,b,c$ 的大小关系为 (　　)

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后与其导函数 $y=f'(x)$ 的图象重合,则 $f(\varphi)$ 的值为 (　　)

A. 0　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

7. 在中华传统文化里,建筑、器物、书法、诗歌、对联、绘画几乎无不讲究对称之美,如图所示的是清代诗人黄柏权的《茶壶回文诗》,其以连环诗的形式展现,20 个字绕着茶壶成一圆环,无论顺着读还是逆着读,皆成佳作,数学与生活也有许多奇妙的联系,如 2020 年 02 月 02 日(20200202)被称为世界完全对称日(公历纪年日期中数字左右完全对称的日期).数学上把 20 200 202 这样的对称数叫回文数,如 11,242,5 225 都是回文数,则用 0,1,2,3,4,5 这些数字构成的所有三位数的回文数中能被 3 整除的个数是 (　　)

A. 8　　B. 10　　C. 11　　D. 13

8. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c)$的左、右焦点分别是 $F_1$，$F_2$，$P$ 是椭圆 $C$ 上一点，$Q$ 是线段 $PF_1$ 上靠近点 $F_1$ 的三等分点，若 $OP\perp OQ$，则椭圆 $C$ 的离心率的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

9. 下列统计量中，用于测度样本的集中趋势的有 ( )

A. 中位数　　B. 平均数　　C. 众数　　D. 标准差

10. 一口袋中有除颜色外完全相同的 3 个红球和 2 个白球，从中无放回地随机取两次，每次取 1 个球，记事件 $A_1$：第一次取出的是红球；事件 $A_2$：第一次取出的是白球；事件 $B$：取出的两球同色；事件 $C$：取出的两球中至少有一个红球，则下列结论中正确的是 ( )

A. 事件 $A_1$ 与事件 $A_2$ 互斥　　B. 事件 $B$ 与事件 $C$ 相互独立

C. $P(B)=\frac{2}{5}$　　D. $P(C|A_2)=\frac{3}{4}$

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，其中 $\lambda\in(0,1)$，则下列结论中正确的有 ( )

A. $PC_1\perp A_1D$

B. $PA_1$ 与平面 $ABD_1$ 所成角的最大值为$\frac{\pi}{3}$

C. 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，则平面 $PAC$//平面 $A_1C_1D$

D. 若$\triangle PAC$ 为锐角三角形，则 $\lambda\in\left(\frac{2}{3},1\right)$

12. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$与 $g(x)$的导数分别为 $f'(x)$与 $g'(x)$，已知 $f(x)=g(3-x)-1$，$f'(x+1)=g'(x)$，且 $f'(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，则下列结论中一定正确的有 ( )

A. $f(x)+f(2-x)=0$　　B. $f'(2)=0$

C. $g(1-x)=g(1+x)$　　D. $g'(x)+g'(2-x)=0$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 已知 $2x-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各二项式系数之和为 64，则其展开式中的常数项为________.

14. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F$，过点 $F$ 且斜率为$\sqrt{3}$的直线与抛物线在第一象限交于点 $A$，过点 $A$ 作抛物线准线的垂线，垂足为 $M$. 若$\triangle AMF$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，则 $p=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+a, & x\leqslant 0,\\ \ln x+ax, & x>0\end{cases}$恰有三个零点，则实数 $a$ 的取值范围是________.

16. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{5}$，$AB\perp BD$，将$\triangle ABD$ 沿 $BD$ 折起到$\triangle PBD$ 的位置，若二面角 $P-BD-C$ 的大小为 $120°$，则四面体 $PBCD$ 外接球的表面积为________.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

**17.** （10 分）

在下面两个条件中任选一个，补充在下面的问题中并作答.

①$a_n^2+2a_n=4S_n-1$；②$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$.

已知 $S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和，满足 $a_1=1$，$a_n>0$，________.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=S_n\cos n\pi$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n-1$ 项和 $T_{2n-1}$.

**18.**（12 分）

为了进一步加快推进学生素质教育，丰富学生的课余生活，挖掘学生的动手动脑潜力，学校在高一年级进行了一次“变废为宝”手工作品评比，对参赛作品进行统计得到如下统计表：

| | 不合格 | 合格 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 女生 | 120 | 100 | 220 |
| 男生 | 30 | 50 | 80 |
| 合计 | 150 | 150 | 300 |

（1）运用独立性检验的思想方法判断：能否有 99％以上的把握认为性别与作品是否合格有关联？并说明理由；

（2）学校为了鼓励更多的同学参与到“变废为宝”活动中来，决定通过 3 轮挑战赛评选出一些“手工达人”，3 轮挑战结束后，至少 2 次挑战成功的参赛者被评为本学期的“手工达人”，已知某参赛者挑战第一、二、三轮成功的概率分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，求该参赛者在本学期 3 轮挑战中成功的次数 $X$ 的概率分布及数学期望 $E(X)$.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

| $P(\chi^2 \geqslant x_0)$ | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

**19.** （12 分）

在$\triangle ABC$中，$\angle ACB$的平分线$CM$交边$AB$于点$M$，且$AM=CM=1$.

（1）若$A=\frac{\pi}{6}$，求$\triangle ABC$的面积$S$；

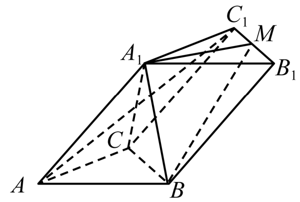
（2）求$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+|\overrightarrow{BM}|$的最小值.

**20.** （12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，$A_1C=A_1B$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 $ABC$，$M$ 是棱 $B_1C_1$ 的中点.

（1）求证：$AC_1$∥平面 $A_1BM$；

（2）若四棱锥 $A_1-BCC_1M$ 的体积为$\frac{3}{2}$，求二面角 $A_1-BM-C$ 的余弦值.



**21.** （12 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知圆 $E:(x+2)^2+y^2=4$ 和定点 $F(2,0)$，$P$ 为圆 $E$ 上的动点，线段 $PF$ 的垂直平分线交直线 $PE$ 于点 $Q$，设动点 $Q$ 的轨迹为曲线 $C$.

（1）求曲线 $C$ 的方程；

（2）设曲线 $C$ 交 $x$ 轴正半轴于点 $A$，过点 $T(t,0)(-1<t<1)$ 的直线 $l$ 交曲线 $C$ 于点 $M,N$（异于点 $A$），直线 $MA,NA$ 分别交直线 $x=t$ 于点 $G,H$. 若 $F,A,G,H$ 四点共圆，求实数 $t$ 的值.

**22.** (12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x$，$g(x)=(x-1)e^x$，其中 $a$ 为实数.

(1) 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线重合，求 $a$ 的值；

(2) 若 $a>e$，设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的极值点为 $x_0$.

求证：①函数 $h(x)$ 有两个零点 $x_1$，$x_2$ $(x_1<x_2)$；② $3x_0-x_1-x_2>1$.

密

封

线