2022-2023 学年第二学期期初考试

高三数学 2023.2

（全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数 z 满足 $\mathrm{i}(z+\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$ （i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内所对应的点在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知：a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a<b$”是“$a<b-1$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=100$，则前 9 项和等于（　　）

A．150　　B．180　　C．300　　D．360

4．平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足：$\vec{a}+\vec{b}=(3,-2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(1,x)$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 x 的值为（　　）

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\pm 2\sqrt{3}$　　D．$\pm 2\sqrt{2}$

5．埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，其形状可视为一个正四棱锥，已知该金字塔的塔高与底面边长的比满足黄金比例，即比值约为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则它的侧棱与底面所成角的正切值约为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

6．已知 α，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$2\tan\alpha=\dfrac{\sin 2\beta}{\sin\beta+\sin^2\beta}$，则 $\tan(2\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{3})=$（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

7．已知一组数据 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数是 2，方差是 3，则对于以下数据：

$$2x_1+1，2x_2+1，2x_3+1，2x_4+1，2x_5+1，1，2，3，4，5$$

下列选项正确的是（　　）

A．平均数是 3，方差是 7　　B．平均数是 4，方差是 7

C．平均数是 3，方差是 8　　D．平均数是 4，方差是 8

8．平面直角坐标系 xOy 中，已知 x 轴正半轴上从左至右的四点 A、B、C、D 的横坐标依次为 $a-c$、a、$a+c$、$2a$，y 轴上点 M、N 的纵坐标分别为 m、$-2m$（$m>0$），设满足 $PA+PC=2a$ 的动点 P 的轨迹为曲线 E，满足 $QN=2QM$ 的动点 Q 的轨迹为曲线 F，当动点 Q 在 y 轴正半轴上时，DQ 交曲线 E 于点 P_0，且 OP_0 与 BQ 的交点恰好在曲线 F 上，则 $a:c=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列说法中正确的有（　　）

A．$C_9^2=C_9^7$

B．$C_4^2+C_4^3=C_5^3$

C．$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n$

D．$(1+x)^4$展开式中二项式系数最大的项为第三项

10．已知实数a，$b>0$，$2a+b=4$，则下列说法中正确的有（　　）

A．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$有最小值$\dfrac{3}{2}$

B．a^2+b^2有最小值$\dfrac{16}{5}$

C．4^a+2^b有最小值 8

D．$\ln a+\ln b$有最小值$\ln 2$

11．高斯是德国著名数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数．例如$[-3.5]=-4$，$[3.5]=3$．已知函数$f(x)=\cos x+|\cos x|$，函数$g(x)=[f(x)]$，则下列说法中正确的有（　　）

A．函数$f(x)$在区间$(0,\pi)$上单调递增

B．函数$f(x)$图象关于直线$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$对称

C．函数$g(x)$的值域是$\{0,1,2\}$

D．方程$g(x)=x$只有一个实数根

12．在四面体$ABCD$的四个面中，有公共棱AC的两个面全等，$AD=1$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=90^\circ$，二面角$B-AC-D$大小为θ，下列说法中正确的有（　　）

A．四面体$ABCD$外接球的表面积为3π

B．四面体$ABCD$体积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

C．若$AD=AB$，$AD\perp AB$，则$\theta=120^\circ$

D．若$AD=BC$，$\theta=120^\circ$，则$BD=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若$S_3=4$，$S_6=12$，则$S_9=$___▲___．

14．双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，且右支上有一点$P(p,1)$，则$\cos\angle F_1PF_2=$___▲___．

15．某个随机数选择器每次从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数字中等可能地选择一个数字，利用该随机数选择器连续进行三次选择，选出的数字依次是a,b,c，则概率$P(a<b<c)=$___▲___．

16．已知函数$f(x)=ax^2+x$，若当$x\in[0,1]$时，$|f(x+1)|\le a+1$恒成立，则实数a的取值范围是___▲___．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$S_n=a_{n+1}-2$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\log_2 a_n$．

①$c_n=b_n\cdot a_n$；　　②$c_n=\dfrac{1}{4{b_n}^2-1}$；　　③$c_n=(-1)^n(b_n)^2$．

从上面三个条件中任选一个，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题满分 12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c．$A=\dfrac{2\pi}{3}$，$b=10$，$c=6$，$\triangle ABC$的内切圆I的面积为S．

（1）求S的值；

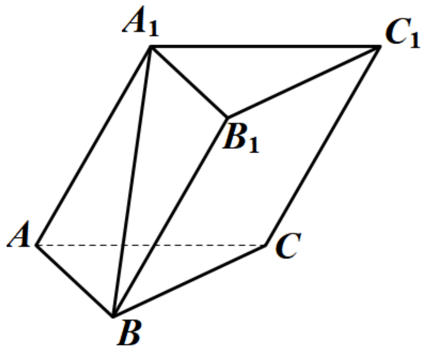
（2）若点D在AC上，且B,I,D三点共线，求$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$的值．

19．（本小题满分 12 分）

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面ACC_1A_1是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，$AA_1=2$，$AC\perp A_1B$．

（1）求证：$BA=BC$；

（2）已知$AB=\sqrt{2}$，$A_1B=2$，求直线A_1B与平面A_1B_1C所成角的正弦值．



20．（本小题满分 12 分）

云计算是信息技术发展的集中体现，近年来，我国云计算市场规模持续增长．从中国信息通信研究院发布的《云计算白皮书（2022 年）》可知，我国 2017 年至 2021 年云计算市场规模数据统计表如下：

年份	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年
年份代码 x	1	2	3	4	5
云计算市场规模 y/亿元	692	962	1334	2091	3229

经计算得：$\sum_{i=1}^{5}\ln y_i=36.33$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i\ln y_i)=112.85$．

（1）根据以上数据，建立 y 关于 x 的回归方程 $\hat{y}=\mathrm{e}^{\hat{b}x+\hat{a}}$（e 为自然对数的底数）．

（2）云计算为企业降低生产成本、提升产品质量提供了强大助推力．某企业未引入云计算前，单件产品尺寸与标准品尺寸的误差 $\varepsilon\sim N(0,\dfrac{4}{m})$，其中 m 为单件产品的成本（单位：元），且 $P(-1<\varepsilon<1)=0.6827$；引入云计算后，单件产品尺寸与标准品尺寸的误差 $\varepsilon\sim N(0,\dfrac{1}{m})$．若保持单件产品的成本不变，$P(-1<\varepsilon<1)$ 将会变成多少？ 若保持产品质量不变（即误差的概率分布不变），单件产品的成本将会下降多少？

附：对于一组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)，其回归直线方程 $\hat{y}=\hat{\beta}x+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}$.

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$，$P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$，$P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973$．

21．（本小题满分 12 分）

已知 AB 为抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 的弦，点 C 在抛物线的准线 l 上．当 AB 过抛物线焦点 F 且长度为 8 时，AB 中点 M 到 y 轴的距离为 3．

（1）求抛物线 G 的方程；

（2）若 $\angle ACB$ 为直角，求证：直线 AB 过定点．

22．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x+2}$，$x\in R$；$g(x)=\cos x$，$x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$．（e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}\approx 2.718$）

（1）若函数 $h(x)=af(x)-g(x)$ 在区间 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在直线 l 同时与 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的图象相切？如果存在，判断 l 的条数，并证明你的结论；如果不存在，说明理由．