江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练（13）

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．$M=\left\{x\mid y=\sqrt{x^2-1}\right\}$，$N=\left\{y\mid y=-x^2\right\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　C．$[-1,0]$　　D．$[0,1]$

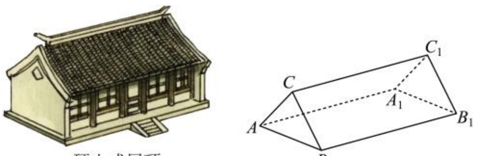
2．已知复数 $z=\dfrac{2+i}{i}$，那么在复平面内，复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3．在 $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中，常数项为（　　）

A．15　　B．-15　　C．30　　D．-30

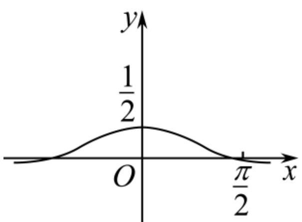
4．我国古代建筑的屋顶对建筑立面起着特别重要的作用，古代建筑屋顶主要有庑殿式、硬山顶、歇山顶、悬山顶攒尖顶、盝顶、卷棚顶等类型，其中硬山式屋顶造型的最大特点是比较简单、朴素，只有前后两面坡，而且屋顶在山墙墙头处与山墙齐平，没有伸出部分，山面裸露没有变化．硬山式屋顶（如图 1）可近似地看作直三棱柱（如图 2），其高为 10m，CC_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为 1.5m，AB 为 4m，则可估算硬山式屋顶的体积约为（　　）

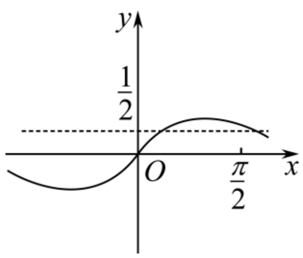


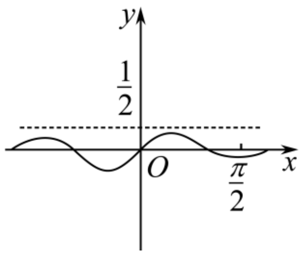
硬山式屋顶
图1　　图2

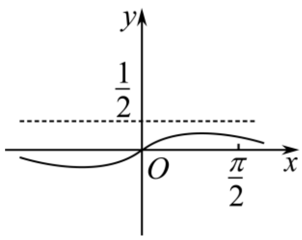
A．15m^3　　B．30m^3　　C．45m^3　　D．60m^3

5．函数 $y=\dfrac{\sin x}{e^x+e^{-x}}\left(x\in[-2,2]\right)$ 的图象大致为（　　）

A．


B．


C．


D．


6．“双十二”网购狂欢节是继“双十一”之后的又一次网络促销日，在这一天，许多网商还会进行促销活动，但促销力度不及“双十一”.已知今年“双十二”期间，某小区居民网上购物的消费金额（单位：元）近似服从正态分布 $N(600,10000)$，则该小区 800 名居民中，网购金额超过 800 元的人数大约为（　　）

（参考数据：$P(|X-\mu|<\sigma)=0.683, P(|X-\mu|<2\sigma)=0.954, P(|X-\mu|<3\sigma)=0.997$）

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 25

7．已知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 4，底面 ABC 中，$AC=6$，$\angle ABC=60^\circ$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值是（　　）

A．24π　　B．$54\sqrt{3}$　　C．$18\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{16\sqrt{3}+24}{3}$

8．已知直线 l：$y=kx(k>0)$ 既是函数 $f\left(x\right)=x^2+1$ 的图象的切线，同时也是函数 $g\left(x\right)=\dfrac{px}{x+1}+\ln x\left(p\in R\right)$ 的图象的切线，则函数 $g\left(x\right)$ 零点个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．0 或 1　　D．1 或 2

二、多项选择题. 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．设 a,b,c 为实数且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$2020^{a-b}>1$

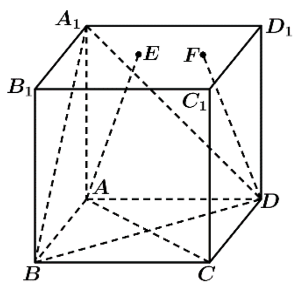
C．$\ln a>\ln b$　　D．$a\left(c^2+1\right)>b\left(c^2+1\right)$

10．已知函数 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$，则下列结论正确的有（　　）

A. π 为函数 $f(x)$ 的一个周期　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数　　D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\sqrt{2},2\right]$

11．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E，F 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，若 $|AE|=\sqrt{5}$，$AC\perp DF$，则下述结论正确的是（　　）



A．E 到直线 BC 的最大距离为 $\sqrt{5}$　　B．点 F 的轨迹是一个圆

C．$|EF|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$　　D．直线 DF 与平面 A_1BD 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12． 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，若 $g(x+1)-f(2-x)=2$，

$f'(x)=g'(x-1)$，且 $g(x+2)$ 为奇函数，则下列说法中一定正确的是（　　）

A．$g(2)=0$

B．函数 $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称

C． 函数 $f(x)$ 是周期函数

D．$\sum_{k=1}^{2023} g(k)=0$

三、填空题. 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．过点$P(1,1)$作圆C：$x^2+y^2=2$的切线交坐标轴于点A，B，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$_____.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1},-1<x<0\\ 2x,x\geq 0\end{cases}$ 若实数 a 满足 $f(a)=f(a-1)$，则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$__________.

15．已知$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)$的值为_________.

16．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(2,0)$，经过原点$O$且斜率$k\geq\sqrt{3}$的直线与椭圆$C$交于$A,B$两点，$AF$ 的中点为M，BF的中点为N.若$OM\perp ON$,则椭圆C的离心率e的取值范围是_________.

四、解答题. 本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．已知函数 $f(x)=(\cos x-\sin x)^2-2\sin^2 x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期与单调递减区间；

（2）若 $f(x_0)=-1$，且 $x_0\in(-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$，求 x_0 的值.

18．在①$b^2+c^2-a^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$，②$a\sin B=b\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$，③$2a=\dfrac{b\cos C+c\cos B}{\cos A}$这三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并加以解答.

在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别是a、b、c，ΔABC的面积为S，_________.

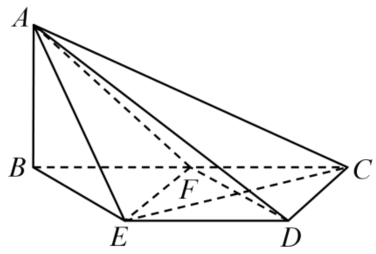
（1）求角A；

（2）若$AC=2,BC=\sqrt{7}$，点D在线段AB上，且ΔACD与ΔBCD的面积比为$4:5$，求CD的长.

19．在四棱锥 $A-BCDE$ 中，直线 $AB\perp$ 平面 $BCDE$，底面 $BCDE$ 是梯形，$BC//DE$，$BC\perp CD$，$CD=DE=\frac{1}{2}BC=2$，F 是边 BC 的中点.

（1）证明：$AE\perp CE$；

（2）若平面 ADF 与平面 ABE 所成二面角为 45°，求直线 AD 与平面 ABE 所成角的正弦值.



20．已知二项式 $\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x}\right)^n$ 的展开式的各项系数和构成数列 $\{a_n\}$，数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$，前 n 项和为 S_n（$S_n\neq 0$），且当 $n\geqslant 2$ 时，有 $2S_n^2=2b_nS_n-b_n$（$n\geqslant 2$）

（1）求证：$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为等差数列；并求 a_n 和 S_n；

（2）设数列 $\left\{\frac{a_n}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $\lambda\left(T_n+\frac{1}{9}\right)\leqslant 1$ 对任意的正整数恒成立，求实数 λ 的取值范围.

21．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F_2，上顶点为 H，O 为坐标原点，$\angle OHF_2=30°$，点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设经过点 F_2 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A，B 两点，点 $P(-2,0)$，$Q(2,0)$．若 M，N 分别为直线 AP，BQ 与 y 轴的交点，记 $\triangle MPQ$，$\triangle NPQ$ 的面积分别为 $S_{\Delta MPQ}$，$S_{\triangle NPQ}$，求 $\frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}}$ 的值.

22．已知函数 $f(x)=xe^x-a\sin x-x$

（1）求当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 最值；

（2）若 $g(x)=f(x)+x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在极值点 x_0.

①求 a 的取值范围；

②证明 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内存在唯一零点 x_1，且 $x_1<2x_0$.