○解题研究○

极限视角下的函数零点问题

赵景刚　吴莉娜

(江苏省常州高级中学,213003)

摘要:本文以高考题为例,从极限的视角研究函数零点问题,立足教材,结合不等式,借助幂(指数、对数)函数级别关系及洛必达法则判断函数是否存在零点,再利用常见的放缩方法,将取点目标转化为可解不等式,得到解决函数零点问题的常见解题策略.

关键词:极限视角;函数零点;放缩取点

函数零点问题一直是高考的重点与难点,函数极值与最值、不等式恒成立等问题也会涉及到函数零点问题.对于函数零点问题,可以借助函数零点存在定理及函数单调性判断零点的存在性,而如何判断并找到异号的函数值是解决该类问题的关键.导数是研究函数性质的有力工具,其本身就是由极限定义的,从“极限”的视角认识研究函数性质是必要的并且是合理的.

一、必备知识与方法

不同的函数模型有不同的“变化趋势”,对不同函数“变化趋势”的研究和比较,可以加深对函数性质的理解.通常可以通过常见的两个不等关系,给出指数函数、对数函数与幂函数“变化趋势”量化关系.

1.常见放缩

(1)对于 $e^x \geqslant x+1>x$,将 x 替换成 $\frac{x}{m}$ $(m>0)$,则 $e^{\frac{1}{m}x}>\frac{1}{m}x$,$e^x>\frac{1}{m^m}x^m$,从而指数函数是幂函数的高阶无穷大.

(2)对于 $\ln x \leqslant x-1<x$,将 x 替换成 $x^m(m>0)$,则 $\ln x^m<x^m$,$\ln x<\frac{1}{m}x^m$,从而幂函数是对数函数的高阶无穷大.

2.洛必达法则

对于分式函数的极限情况,可以借助洛必达法则研究 $\frac{\infty}{\infty}$,$\frac{0}{0}$ 型极限.

二、函数极限组合类型

历年的高考试题主要考查由指数函数、对数函数、幂函数组成的超越函数导数问题,对这类函数极限组合类型进行讨论研究,可以更好地研究函数性质,帮助我们找到处理函数零点问题的一般方法.

1.“∞ + 有界”型

例 1 (2020 年高考数学山东卷第 21 题)已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.(1)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积;(2)若 $f(x)\geqslant 1$,求 a 的取值范围.

分析　本题第(2)问是含参数的不等式恒成立问题,可将其转化为函数最值问题进行处理.通过对导函数零点的研究,得到函数的单调性及最值.

解析　(1)略;(2)由题意,$a>0$,$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$,$x>0$,$f''(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$ 恒成立,所以 $f'(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增.一方面,由 $e^x\geqslant x+1$,则 $f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}\geqslant ax-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-1}{x}$①.令 $\frac{ax^2-1}{x}\geqslant 0$,解得 $x\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$,取

$p=\frac{1}{\sqrt{a}}+1$，则$f'(p)>0$；另一方面，当$0<x<1$时，$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}<ae^{1-1}-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{x}$②. 令$a-\frac{1}{x}\leqslant 0$，解得$x\leqslant\frac{1}{a}$，取$q=\min\left\{\frac{1}{2a},\frac{1}{2}\right\}$，则$f'(q)<0$；所以存在唯一的$x_0\in(q,p)$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0(*)$. 列表可得$f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a$. 对于$(*)$式，$ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，两边取对数得$\ln a+x_0-1=-\ln x_0$，所以$f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0+1$，要满足$f(x)\geqslant 1$恒成立，只需要$f(x_0)=\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0+1\geqslant 1$，即$\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0\geqslant 0$，解得$0<x_0\leqslant 1$，由$\ln a=-\ln x_0-x_0-1$，$\ln a\in[0,+\infty)$，解得$a\geqslant 1$.

点评 在考虑函数极限时，经常会遇到“∞ + 有界”型，该极限类型中起决定作用的是“∞”，而“有界”是可以在局部区间内控制的. 本题通过高阶求导得$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，为了得到一阶导数正负情况，需要研究一阶导数$f'(x)$在区间$(0,+\infty)$端点$0,+\infty$处的极限情况. 当$x\to+\infty$时，$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}=(+\infty)+$有界，$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$中起决定作用的是指数型$ae^{x-1}$，为了使得“超越式”不等式$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}>0$可解，将指数放缩成可解不等式①. 当$x\to 0$时，$f'(x)$有界且趋于$-\infty$，$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$中其决定作用的是$-\frac{1}{x}$，因为$ae^{x-1}$是有界可控制的，所以在$x\to 0$的小区间$0<x<1$中控制$ae^{x-1}$，使得$ae^{x-1}<a$，从而得到可解不等式②.

2. “$\infty-\infty$”型

例 2 (2021 年高考数学浙江卷第 22 题) 设a,b为实数，且$a>1$，函数$f(x)=a^x-bx+e^2(x\in\mathbf{R})$. (1) 求函数$f(x)$的单调区间；(2) 若对任意$b>2e^2$，函数$f(x)$有两个不同的零点，求$a$的取值范围.

分析 本题第(2)问是含参数的函数零点问题，可以先考虑条件成立的必要性，初步确定参数a的范围，再从极限的视角判断并确定函数零点.

解析 (1) 略；(2) $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in\mathbf{R})$，则$f'(x)=a^x\ln a-b$，由$a>1f''(x)=a^x(\ln a)^2>0$，所以$f'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，由$b>2e^2$，令$f'(x)=0$，解得$x_0=\log_a\left(\frac{b}{\ln a}\right)$，所以函数$f(x)$在$(-\infty,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增. 要使得函数$f(x)$有两个不同的零点，则必有$f(x)_{\min}=f(x_0)<0$，即$f\left(\log_a\left(\frac{b}{\ln a}\right)\right)<0$，$\frac{b}{\ln a}-b\log_a\left(\frac{b}{\ln a}\right)+e^2<0$，变形为$\frac{b}{\ln a}-\frac{b}{\ln a}\ln\left(\frac{b}{\ln a}\right)+e^2<0(*)$. 记$g(t)=t-t\ln t+e^2$，$t>0$，$g'(t)=-\ln t$，可得$g(t)$在$(0,1)$递增，在$(1,+\infty)$递减. 又$g(e^2)=0$，因此当且仅当$t>e^2$时，$g(t)<0$. $(*)$式即为$g\left(\frac{b}{\ln a}\right)<0$，所以对任意$b>2e^2$，$\frac{b}{\ln a}>e^2$，解得$1<a\leqslant e^2$. 当$1<a\leqslant e^2$时，$b>2e^2$，则$\frac{b}{\ln a}>e^2$，$x_0=\log_a\left(\frac{b}{\ln a}\right)>0$，$f(x)_{\min}=f(x_0)<0$，又$f(0)=1+e^2>0$且$f(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递减，所以存在唯一的$x_1\in(0,x_0)$，使得$f(x_1)=0$. 考虑函数$y=a^x$在点$(0,1)$处的切线方程，可得$a^x\geqslant x\ln a+1>x\ln a$(证明略)，所以$a^{\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}\ln a$，平方得$a^x>\frac{x^2}{4}\ln^2 a$，则有$f(x)=a^x-bx+e^2>\frac{x^2}{4}\ln^2 a-bx+$

$e^2 > \frac{x^2}{4}\ln^2 a - bx$.令$\frac{x^2}{4}\ln^2 a - bx \geqslant 0$①,解得$x \geqslant \frac{4b}{\ln^2 a} > 0$,则$f\left(\frac{4b}{\ln^2 a}\right) > 0$.又$f(x)$在$(x_0, +\infty)$上单调递增,所以存在唯一的$x_2 \in \left(x_0, \frac{4b}{\ln^2 a}\right)$,使得$f(x_2) = 0$,所以$1 < a \leqslant e^2$满足题意.

点评 对于函数极限"$\infty - \infty$"型,该极限类型中有两个"∞",需要确定起主要作用的"∞",在"极限"视角下分析判断函数零点存在的基础上,把含有两个"∞"的"超越"不等式放缩成可解不等式.在本题中,当$1 < a \leqslant e^2$时,结合函数单调性,先判断函数$f(x)$在区间端点处的极限类型.$x \to -\infty$,$f(x) = a^x - bx + e^2$有界且趋于$+\infty$,观察取$f(0) = 1 + e^2 > 0$即可.$x \to +\infty$时,$a^x(a > 1)$是$bx(b > 0)$的高阶无穷大,所以$x \to +\infty$,$f(x) = a^x - bx + e^2 = (+\infty) - (+\infty) = +\infty$,为了使得"超越"不等式$f(x) > 0$可解,考虑将指数型$a^x$放缩成幂函数型$x^\alpha(\alpha > 0)$,得到可解不等式①.

3. "$\frac{\infty}{\infty}$"型

例 3 (2018 高考数学全国 2 卷第 21 题)已知函数$f(x) = e^x - ax^2$.(1)若$a = 1$,证明:当$x \geqslant 0$时,$f(x) \geqslant 1$;(2)若$f(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点,求a.

分析 在研究导数问题时,对什么函数进行求导是顺利解题的关键.本题第(2)问,若对原函数直接求导,会涉及二阶导函数零点问题,不易处理,依据原函数结构特征,可以构造并研究新函数(分式函数)零点问题.

解析 (1)略;(2)设函数$g(x) = 1 - \frac{ax^2}{e^x}$,则$f(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点,当且仅当$g(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点.

(i)当$a \leqslant 0$,$g(x) > 0$,$g(x)$没有零点;

(ii)当$a > 0$,$g'(x) = ae^{-x}x(x - 2)$,$g(x)$在$(0,2)$单调递减,在$(2, +\infty)$单调递增,所以$g(x)_{\min} = g(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$.

1°若$g(2) > 0$,即$0 < a < \frac{e^2}{4}$,$g(x)$在$(0, +\infty)$没有零点;

2°若$g(2) = 0$,即$a = \frac{e^2}{4}$,$g(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点;

3°若$g(2) < 0$,即$a > \frac{e^2}{4}$,由于$g(0) = 1 > 0$,所以$g(x)$在$(0,2)$有一个零点.

由$e^x > \frac{1}{n^n}x^n(n > 0)$,$e^x > \frac{1}{3^3}x^3$,$g(x) = 1 - a\frac{x^2}{e^x} > 1 - \frac{27a}{x}$,令$1 - \frac{27a}{x} \geqslant 0$①,解得$x \geqslant 27a$,则$g(27a) > 0$,故$g(x)$在$(2, 27a)$有一个零点.因此,$g(x)$在$(0, +\infty)$有两个零点.

综上,$g(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点时,$a = \frac{e^2}{4}$.

点评 对于分式函数,当遇到"$\frac{\infty}{\infty}$"极限类型,需要借助洛必达法则或分子分母高阶无穷大关系判断函数是否存在零点,再借助放缩法将"超越"不等式放缩为可解不等式.在本题中,当$a > \frac{e^2}{4}$时,结合函数单调性,判断函数$g(x)$在区间端点处的极限类型,$x \to +\infty$时,函数$g(x)$极限为"$\frac{\infty}{\infty}$"型,e^x为x^2的高阶无穷大,由洛必达法则$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$,所以必存在足够大的$x_0$,使得$g(x_0) > 0$.再利用放缩$e^x > \frac{1}{3^3}x^3$,得到可解不等式①.

对于函数零点问题,通过类型归纳概括、得到如下解题思维导图(如图 1):若函数问题涉及函数零点问题,先对函数(导函数)极限类型进行分析,再利用指数函数、对幂函数级别关系或洛必达法则判断函数零点是否存在,在函数存在零点的基础上,借助放缩法、有界控制法、观察法等进行取点,从而得到函数(导函数)单调性,最终解决函数问题.

(下转第 48 页)

$0)$，$B(1,0)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，记 $P\left(\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，$Q(\mu,0)$，设 $W(x,y)$；以 A 为原点，建立仿射坐标系$\{A;AB,AC\}$，则在该仿射系下对应坐标分别为 $A'(0,0)$，$B'(1,0)$，$C'(0,1)$，$P'(0,\lambda)$，$Q'(\mu,0)$，$W'(x',y')$，由定理 2 可得变换

$$T:\begin{cases}x'=x-\frac{1}{\sqrt{3}}y,\\ y'=\frac{2}{\sqrt{3}}y,\end{cases}\text{即}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

由定理 3 可得 $W'P'=2W'Q'$，下列等式：从而有 $\sqrt{(x'-0)^2+(y'-\lambda)^2}=2\sqrt{(x'-\mu)^2+(y'-0)^2}$，化简得 $\left(x'-\frac{4}{3}\mu\right)^2+\left(y'+\frac{1}{3}\lambda\right)^2=\frac{4}{9}(\lambda^2+\mu^2)$，即通过 T 变换后的图形是一个圆，此时 T 变换后的面积为$S'=\pi r^2=\frac{4}{9}\pi(\lambda^2+\mu^2)$，又

$$\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

故由推论可得变换前的面积

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}S'=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi(\lambda^2+\mu^2).$$

评析 本题若通过直角坐标系求解，难于分析，比较棘手，运算量极大，同时由于高中数学方法局限性，无法大致描绘出其图象.而通过仿射系，将抽象的“好点”曲线转化为具体的圆的标准方程，进而求出“好点”构成区域的面积，求解轻松，利于呈现性质，方便后续的分析研究.

仿射坐标系建立了初等数学与高等数学之间的一种联系，若能熟练运用仿射变换，不但可据本探源，同时可深入研究数学对象之间的联系，进而从更高的角度把握和理解教材.

参考文献

[1] 梅向明，刘增贤，王汇淳，王智秋.高等几何[M].(第4版) 北京：高等教育出版社，2020.

[2] 刘潇曼，梁海龙.椭圆还“圆”法的应用[J].中学生数学，2017(13).

(上接第 45 页)

知识方法源于课本又高于课本，在日常教学中，需要注重高考与教材相结合.一方面依据考纲，从高考题中获取知识方法，培养学生思维能力和核心素养，找到攻克同一类型题目的解题要领.另一方面注重回归课本，从教材中寻找源头，充分挖掘教材中的数学本质和数学思想方法.

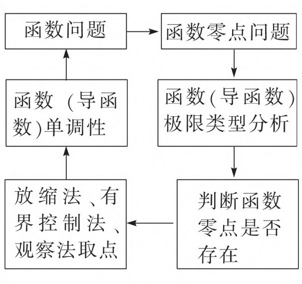

图 1

在复习备考中，需要引导学生对重点、难点题型进行归纳研究，寻找解决不同问题的一般规律和方法.因此，高三复习更适合微专题教学，重视微专题的教学设计，“因微而准，因微而细，因微而深”，帮助学生构建丰富联系的知识系统，促进学生深度学习.

高考中借助函数零点问题综合考查函数、导数等相关知识，侧重考查分类、转化、数形结合等数学思想.而解决该类题型的关键是如何判别并确定函数的零点，通过寻找教材中的“源”——指数函数、对幂函数“变化趋势”的不等关系，借助不等式放缩，成功找到攻克函数零点问题的一般思路和方法.总而言之，“以高考为抓手，以教材为根本”能够有效引领高三复习，帮助学生在解决数学问题过程中有的放矢.