

## 江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练 (14)

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若“ $x > 2a - 3$ ”是“ $-1 < x < 3$ ”的必要不充分条件，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a < 1$                   B.  $a \leq 1$                   C.  $a > 1$                   D.  $a \geq 1$

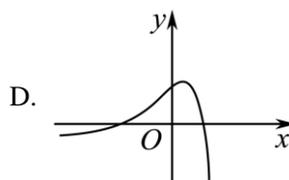
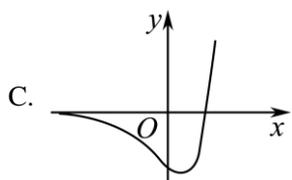
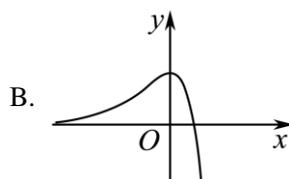
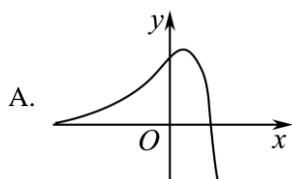
2. 已知纯虚数  $z$  满足  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ，则  $z$  的虚部可以是 ( )

- A. 0                          B.  $i$                           C.  $-1$                           D.  $\sin \frac{\pi}{5}$

3.  $\frac{-\sin 110^\circ \cos 70^\circ}{\cos^2 25^\circ - \sin^2 155^\circ}$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$                           B.  $\frac{1}{2}$                           C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                           D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 函数  $f(x) = -e^{3x} + 2e^{2x}$  的图象大致为 ( )

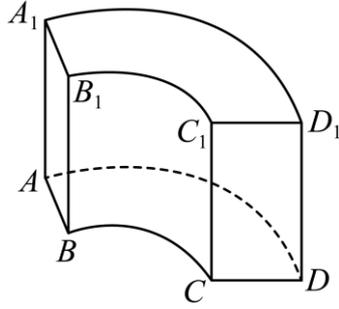


5. 定义在  $[0, \pi]$  上的函数  $y = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$  ( $\omega > 0$ ) 存在极值点，且值域  $M \subseteq [-\frac{1}{2}, +\infty)$ ，则  $\omega$  的取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{7}{6}, 2]$                   B.  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$                   C.  $(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}]$                   D.  $[\frac{2}{3}, 2]$

6. 中国古代数学的瑰宝《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体，该几何体为上、下底面均为扇环形的柱体（扇环是指圆环被扇形截得的部分）. 现有一个如下图所示的“曲池”，其高为 3， $AA_1 \perp$  底面，底面扇环所对的圆心角为  $\frac{\pi}{2}$ ， $AD$  长度为  $BC$  长度的 3 倍，

且线段  $AB = CD = 2$ ，则该“曲池”的体积为 ( )



- A.  $\frac{9\pi}{2}$                       B.  $5\pi$                       C.  $\frac{11\pi}{2}$                       D.  $6\pi$

7. 已知  $a = \sin 1$ ,  $b = \cos 1$ , 则下列不等式正确的是( )

- A.  $\log_a b < a^b < b^a$     B.  $\log_a b < b^a < a^b$     C.  $a^b < b^a < \log_a b$     D.  $b^a < a^b < \log_a b$

8. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上 函数  $f(x)$ , 满足  $f(4x+2)$  为奇函数且  $f(2x+1)$  为偶函数, 则下列结论一定正确的是 ( )

- A. 函数  $f(x)$  的周期为 2                      B. 函数  $f(x)$  的周期为 3  
C.  $f(2020) = 0$                                   D.  $f(2021) = 0$

二、多项选择题. 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数  $z_1, z_2$  在复平面内对应的点分别为  $Z_1, Z_2$ ,  $O$  为坐标原点, 则下列说法正确的是 ( )

- A. 当  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$  时,  $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$   
B. 当  $|\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{Z_1Z_2}|$  时,  $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$   
C. 满足  $|z_1 - 1| = 1$  的点  $Z_1$  表示的轨迹为直线  
D. 满足  $|z_2 - 1| + |z_2 - 2i| = 3$  的点  $Z_2$  表示的轨迹为椭圆

10. 已知  $a > b > 0$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $\frac{b}{a} > \frac{b+2}{a+2}$                                   B.  $\frac{2a+b}{a+2b} < \frac{a}{b}$   
C.  $2\sqrt{a} > \sqrt{a-b} + \sqrt{b}$                       D.  $\lg \frac{a+b}{2} > \frac{\lg a + \lg b}{2}$

11. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$ , 则下列说法正确的是 ( )

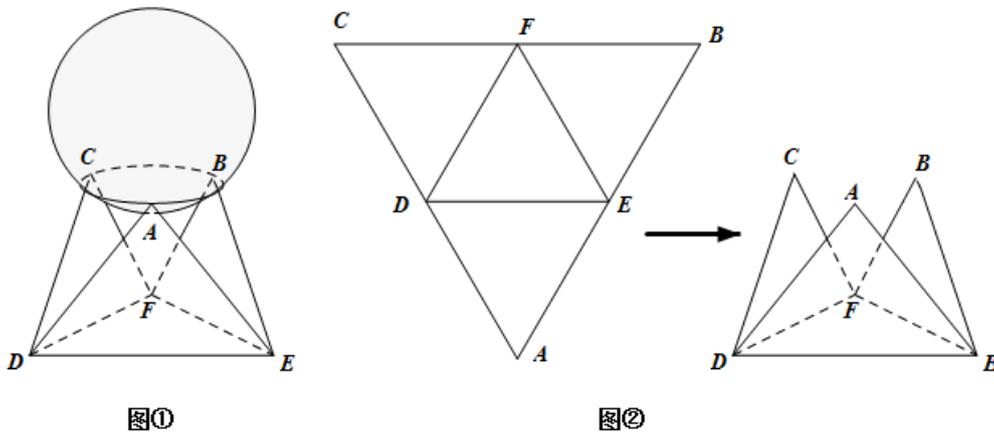
- A. 曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = e^2(x-2)$

B. 不等式  $f(x) \leq 0$  的解集为  $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$

C. 若关于  $x$  的方程  $|f(x)| = a$  有 6 个实根, 则  $a \in (2, e)$

D.  $\forall x_1, x_2 \in (-2, 2)$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2e$

12. 为弘扬中华民族优秀传统文化, 某学校组织了《诵经典, 获新知》的演讲比赛, 本次比赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成, 如图①, 已知球的体积为  $\frac{4\pi}{3}$ , 托盘由边长为 4 的正三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠而成, 如图②. 则下列结论正确的是 ( )



A. 经过三个顶点  $A, B, C$  的球的截面圆的面积为  $\frac{\pi}{4}$

B. 异面直线  $AD$  与  $CF$  所成的角的余弦值为  $\frac{5}{8}$

C. 直线  $AD$  与平面  $DEF$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$

D. 球离球托底面  $DEF$  的最小距离为  $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} - 1$

三、填空题. 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $X \sim N(8, \sigma^2)$ ,  $P(x \geq 10) = m$ ,  $P(6 \leq x \leq 8) = n$ , 则  $\frac{1}{2m} + \frac{4}{n}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14.  $(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$  的展开式的中间项的系数是\_\_\_\_\_(用数字作答).

15. 已知  $\tan \alpha = 4$ ,  $\beta$  满足 ①  $\sin \beta > 0$ , 且  $\sin \beta = 1 + \cos \beta$ , ②  $\tan(2\alpha + \beta) = -\frac{10}{23}$  两个条件中的一个, 则  $\tan(\alpha + \beta)$  的一个值可以为\_\_\_\_\_.

16. 若数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为牛顿数列. 如果

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ , 数列  $\{x_n\}$  为牛顿数列, 设  $a_n = \log_2 \frac{x_n - 2}{x_n - 3}$ , 且  $a_1 = 1$ , 则  $x_2 =$

\_\_\_\_\_ ; 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{2023} =$  \_\_\_\_\_.

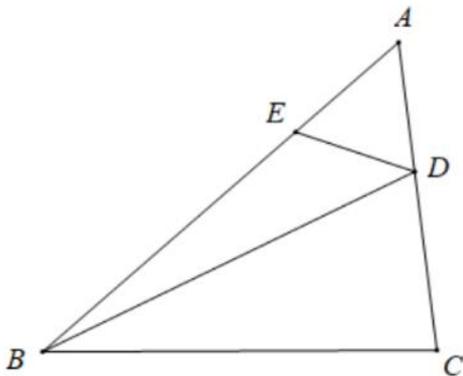
四、解答题. 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-1}a_n = 16n$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = \log_2 a_n + 2^{n-1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

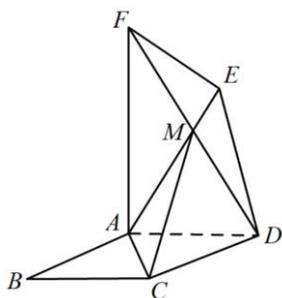
18. 在三角形  $ABC$  中,  $A = 60^\circ$ ,  $D$  点在  $AC$  边上,  $AD = 1$ ,  $DC = \sqrt{3}$ .



(1)  $BD = \sqrt{7}$ , 求  $\triangle ABD$  的面积;

(2) 若  $E$  点在  $AB$  边上,  $AD = AE$ ,  $\angle DBC = 30^\circ$ , 求  $\sin \angle EDB$ .

19. 如图, 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $F$  是平面  $ABCD$  外一点, 在四边形  $ADEF$  中,  $EA$  交  $FD$  于点  $M$ .  $FD = 4$ ,  $AM = 2$ ,  $ME = \sqrt{3} - 1$ ,  $DF = \sqrt{6}$ ,  $FA \perp CD$ .



- (1) 证明:  $FA \perp$  平面  $ABCD$ ;
- (2) 求平面  $MAC$  与平面  $ACB$  夹角余弦值.

20. 为了庆祝中国共产党第二十次全国代表大会胜利召开, 某校组织了一次党史知识竞赛. 已知知识竞赛中有甲、乙、丙三个问题, 规则如下: (1) 学生可以自主选择这三个问题的答题顺序, 三个问题是否答对相互独立; (2) 每答对一个问题可以获取本题所对应的荣誉积分, 并继续回答下一个问题, 答错则不可获取本题所对应的荣誉积分, 且停止答题. 已知学生  $A$  答对甲、乙、丙三个问题的概率及答对时获得的相应荣誉积分如下表.

问题	甲	乙	丙
答对的概率	0.8	0.5	$p$
答对获取的荣誉积分	100	200	300

- (1) 若  $p = 0.3$ , 求学生  $A$  按“甲、乙、丙”的顺序答题并最终恰好获得 300 荣誉积分的概率;
- (2) 针对以下两种答题顺序: ①丙、乙、甲; ②乙、丙、甲, 当  $p$  满足什么条件时, 学生  $A$  按顺序①答题最后所得荣誉积分的期望较高?

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 过点 $(2\sqrt{3}, 0)$ 作垂直于 $x$ 轴的直线截双曲线 $C$ 所得弦长为 $2\sqrt{3}$ .

(1) 求双曲线 $C$ 的方程;

(2) 直线 $y = kx + m (k \cdot m \neq 0)$ 与该双曲线 $C$ 交于不同的两点 $A, B$ , 且 $A, B$ 两点都在以点 $P(0, -1)$ 为圆心的同一圆上, 求 $m$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = me^{2x} + (m - 2)e^x - x$ .

(1) 当 $m = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 $m$ 的取值范围.