

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练 (7)

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(1, 3)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, +\infty)$

2. 复数 $\frac{2i}{1-i}$ (i 是虚数单位) 的虚部是 ()

- A. 1 B. $-i$ C. 2 D. $-2i$

3. 17 世纪, 在研究天文学的过程中, 为了简化大数运算, 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数, 对数的思想方法即把乘方和乘法运算分别转化为乘法和加法, 数学家拉普拉斯称赞为“对数的发明在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍”. 已知 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$, 设 $N = 4^5 \times 27^{10}$, 则 N 所在的区间为 ()

- A. $(10^{15}, 10^{16})$ B. $(10^{16}, 10^{17})$ C. $(10^{17}, 10^{18})$ D. $(10^{18}, 10^{19})$

4. 若 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, $(2\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} + m\vec{b})$, 则 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

5. 围棋起源于中国, 据先秦典籍《世本》记载“尧造围棋, 丹朱善之”, 围棋至今已有四千多年历史, 蕴含着中华文化的丰富内涵. 在某次国际比赛中, 中国派出包含甲、乙在内的 5 位棋手参加比赛, 他们分成两个小组, 其中一个小组有 3 位, 另外一个小组有 2 位, 则甲和乙不在同一个小组的概率为 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$

6. 直线 $y = 1$ 与函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 y 轴右侧交点的横坐标从左到右依次为 a_1, a_2, \dots, a_n , 则下列结论正确的是 ()

- A. $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos 2x$ B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上是减函数
C. a_1, a_2, \dots, a_n 为等差数列 D. $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 34\pi$

7. 若 $a = \ln 5$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 则它们的大小关系是 ()

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

8. 《九章算术》卷第五《商功》中，有“贾令刍童，上广一尺，袤二尺，下广三尺，袤四尺，高一尺。”，意思是：“假设一个刍童，上底面宽1尺，长2尺；下底面宽3尺，长4尺，高1尺。”（注：刍童为上下底面为相互平行的不相似长方形，两底面的中心连线与底面垂直的几何体），若该几何体所有顶点在一球体的表面上，则该球体的体积为（ ）立方尺

- A. $\frac{\sqrt{41}}{3}\pi$ B. 41π C. $\frac{41\sqrt{41}}{6}\pi$ D. $3\sqrt{41}\pi$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + 2b = 1$ ，则（ ）

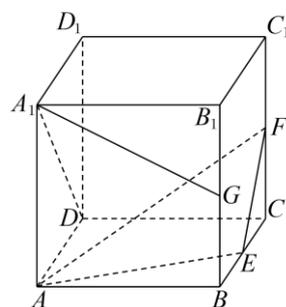
- A. ab 的最大值为 $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 9
 C. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$ D. $(a+1)(b+1)$ 的最大值为 2

10. 已知函数 $f(x) = 2x - \cos x$ 的零点为 x_0 ，则（ ）

- A. $x_0 < \frac{1}{2}$ B. $x_0 > \frac{1}{3}$ C. $\tan x_0 > \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $x_0 - \frac{1}{4} < \sin x_0$

11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点，则（ ）

- A. 直线 A_1D 与直线 EF 垂直 B. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等
 C. 直线 A_1G 与平面 AEF 不平行吧 D. 过 A, E, F 三点的平面截正方体的截面为等腰梯形



12. 设抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的焦点为 F ，准线为 l ， $P(x_0, y_0)$ 为 C 上一动点， $A(2, 1)$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. 当 $x_0 = 2$ 时，抛物线 C 在点 P 处的切线方程为 $x - 2y - 2 = 0$ B. 当 $x_0 = 4$ 时， $|PF|$ 的值为 6
 C. $|PA| + |PF|$ 的最小值为 3 D. $|PA| - |PF|$ 的最大值为 $\sqrt{5}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 M 交 x 轴于 $A(-2, 0), C(4, 0)$ ，交 y 轴于 B, D ，四边形 $ABCD$ 的面积为 18，则 $OM =$ _____.

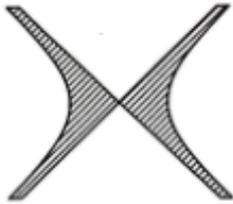
14. 为了监控某种食品的生产包装过程，检验员每天从生产线上随机抽取 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 包食品，

并测量其质量（单位：g）.根据长期的生产经验，这条生产线正常状态下每包食品质量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.假设生产状态正常，记 ξ 表示每天抽取的 k 包食品中其质量在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的包数，若 ξ 的数学期望 $E(\xi) > 0.05$ ，则 k 的最小值为_____.

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

15. 若 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中各项的系数之和为 96，则展开式中 x^2 的系数为_____.

16. 祖暅是我国南北朝时期伟大的科学家，他于 5 世纪末提出了“幂势既同，则积不容异”的体积计算原理，即“夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等”. 现已知直线 $y = \pm 2$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 及其渐近线围成的平面图形 G 如图所示，若将图形 G 被直线 $y = t (-2 \leq t \leq 2)$ 所截得的两条线段绕 y 轴旋转一周，则形成的旋转面的面积 $S =$ _____；若将图形 G 绕 y 轴旋转一周，则形成的旋转体的体积 $V =$ _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $C = 2A$.

(1) 求证： $c = 2a \cos A$ ；

(2) 若 $c = 2a \cos A$ ， $A < B < C$ ， $b = 10$ ，且 $a + c = 2b$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

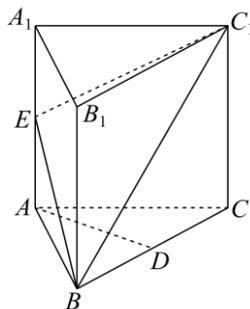
18. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 2$ ，且 $a_2, a_3 + 2, a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n} + \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

19. 如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 1$ ， $CC_1 = \sqrt{3}$ ， D 为 BC 的中点， E 为侧棱 AA_1 上的点.

(1) 当 E 为 AA_1 的中点时，求证： $AD \parallel$ 平面 BC_1E ；



(2)若平面 BC_1E 与平面 ABC 所成的锐二面角为 60° ，求 AE 的长度.

20. 在统计调查中，问卷的设计是一门很大的学问，特别是对一些敏感性问题.例如学生在考试中有无作弊现象，社会上的偷税漏税等，更要精心设计问卷，设法消除被调查者的顾虑，使他们能够如实回答问题，否则被调查者往往会拒绝回答，或不提供真实情况.某调查中心为了调查中学生在考试中有无作弊现象，随机选取 150 名男学生和 150 名女学生进行问卷调查.问卷调查中设置了两个问题：①你是否为男生？②你是否在考试中有作弊现象.调查分两个环节，第一个环节：确定回答的问题，让被调查者从装有 3 个红球，3 个黑球（除颜色外完全相同）的袋子中随机摸取两个球，摸到同色两球的学生如实回答第一个问题，摸到异色两球的学生如实回答第二个问题.第二个环节：填写问卷（问卷中不含问题，只有“是”与“否”）.已知统计问卷中有 70 张答案为“是”.

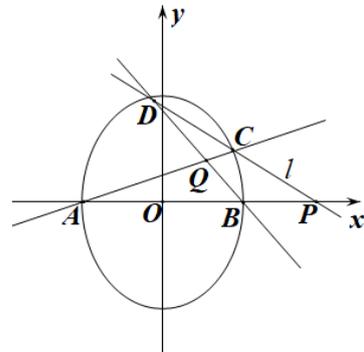
- (1)根据以上的调查结果，利用你所学的知识，估计中学生在考试中有作弊现象的概率；
 (2)据核实，以上的 300 名学生中有 20 名学生在考试中有作弊现象，其中男生 15 人，女生 5 人，试判断是否有 97.5% 的把握认为中学生在考试中有无作弊现象与性别有关.

参考公式和数据如下：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	7.879

21. 如图，椭圆 $M: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点为 $(0,1)$ ， $(0,-1)$ ， A, B 是左右顶点，直线 l 与椭圆交于异于顶点的 C, D 两点，并与 x 轴交于点 P . 直线 AC 与直线 BC 斜率之积为 -2 .

- (1)求椭圆 M 的方程；
 (2)直线 AC 与直线 BD 交于点 Q ，设点 P 与点 Q 横坐标分别为 x_p, x_Q ，则 $x_p \cdot x_Q$ 是否为常数，若是，求出该常数值；若不是，请说明理由.



22. 设函数 $f(x) = me^{x-1}, g(x) = \ln x + n$ ， m, n 为实数，若 $F(x) = \frac{g(x)}{x}$ 有最大值为 $\frac{1}{e^2}$

- (1)求 n 的值； (2)若 $\frac{f(x)}{e^2} > xg(x)$ ，求实数 m 的最小整数值.

数学答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	C	A	C	D	D	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
BC	ABD	AD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\sqrt{2}$ 14、19 15、25 16、 π ； 4π 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

【答案】 (1)证明见解析 (2) $15\sqrt{7}$

【分析】

(1) 利用正弦定理求解；

(2) 由 (1) 得 $\cos A = \frac{c}{2a}$ ，再利用余弦定理，并将 $b=10$ ，且 $a+c=2b$ 代入求得 a, c ，然后利用面积公式求解。

(1) 解：因为 $C=2A$ ，由正弦定理可得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{2\sin A \cos A}$ ，所以 $c=2a \cos A$ ； (4 分)

(2) 由 (1) 得 $\cos A = \frac{c}{2a}$ ，由余弦定理得： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + c^2 - a^2}{20c}$ ，所以 $\frac{c}{2a} = \frac{100 + c^2 - a^2}{20c}$ ， (6 分)

即 $(10-a)c^2 - 100a + a^3 = 0$ ，将 $a+c=20$ ， $c=20-a$ 代入，得 $(10-a)(20-a)^2 - 100a + a^3 = 0$ ，

即 $(10-a)(8-a)=0$ ，解得 $a=8$ 或 $a=10$ ， $\because B>A$ ， $\therefore b>a$ ， $\therefore a=10$ 舍去， $\therefore a=8$ ，

$c=20-8=12$ 。

从而 $\cos A = \frac{c}{2a} = \frac{12}{2 \times 8} = \frac{3}{4}$ ，由 $B>A$ 可知 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ，所以

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 15\sqrt{7}. \quad (10 \text{ 分})$$

【点睛】 本题考查了实数的运算，解一元二次方程---因式分解法，分式的化简求值。也考查了特殊角的三角函数值、立方根、负整数指数幂、零指数幂。

18. (12 分)

$$\text{【答案】 (1) } a_n = 2^n; \quad (2) T_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

【分析】

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据等差数列的性质列方程求得 q 后可得通项公式；

(2) 写出 b_n ，由分组求和法求和。

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)，

因为 $a_1 = 2$ ，且 $a_2, a_3 + 2, a_4$ 成等差数列，

所以 $a_2 + a_4 = 2(a_3 + 2)$ ，即 $2q + 2q^3 = 2(2q^2 + 2)$ ，解得 $q = 2$ ，(4 分)

所以 $a_n = 2^n$ ；(6 分)

(2) 由 (1) $b_n = \frac{1}{2^n} + n$ ，(8 分)

$$T_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \frac{1}{2^n}. \quad (12 \text{ 分})$$

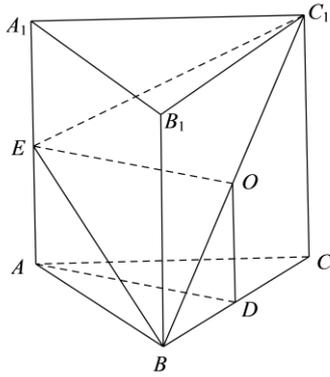
19. (12 分)

$$\text{【答案】 (1) 证明见解析 (2) } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

【分析】

(1) 取 BC_1 中点 O ，连接 OD, OE ， D 为 BC 的中点，再根据条件证明四边形 $ADOE$ 为平行四边形即可求解；(2) 建立空间直角坐标系，设出 E 的坐标，再利用二面角的空间向量法求解即可。

(1) 取 BC_1 中点 O ，连接 OD, OE ， D 为 BC 的中点，



所以 $OD // \frac{1}{2}CC_1$ ，且 $OD = \frac{1}{2}CC_1$ ，又因为 E 为 AA_1 的中点， $AA_1 // CC_1$ ， (2分)

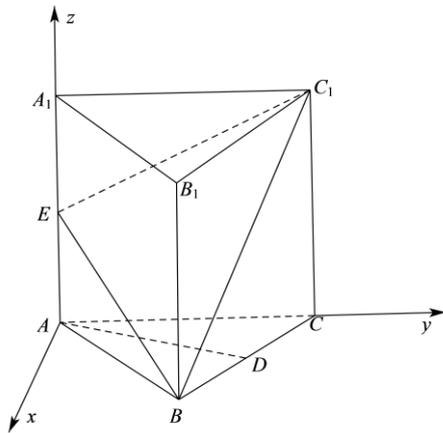
且 $AA_1 = CC_1$ ，所以 $AE // \frac{1}{2}CC_1$ ，且 $AE = \frac{1}{2}CC_1$ ，所以 $OD // AE$ ，且 $OD = AE$ ，

所以四边形 $ADOE$ 为平行四边形，所以 $AD // OE$ ，因为 $AD \not\subset$ 平面 BC_1E ， (4

分)

$OE \subset$ 平面 BC_1E ，所以 $AD //$ 平面 BC_1E 。 (6分)

(2)如图建立空间直角坐标系，



所以 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ， $C_1(0, 1, \sqrt{3})$ ，设 $E(0, 0, m)$ ， $\overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ ， $\overrightarrow{C_1E} = (0, -1, m - \sqrt{3})$ ，

设平面 BC_1E 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{C_1E} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3}z = 0 \\ -y + (m - \sqrt{3})z = 0 \end{cases}, \quad (8$$

分)

所以 $\vec{n}_1 = (m + \sqrt{3}, \sqrt{3}(m - \sqrt{3}), \sqrt{3})$ ，

平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, (10

分)

$$\text{所以 } \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(m+\sqrt{3})^2 + 3(m+\sqrt{3})^2 + 3}} = \frac{1}{2},$$

整理得 $4m^2 - 4\sqrt{3}m + 3 = 0$, 所以 $(2m - \sqrt{3})^2 = 0$,

$$\text{所以 } m = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } AE = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. (12 分)

【答案】(1) $\frac{1}{18}$; (2) 有 97.5% 的把握认为中学生在考试中有无作弊现象与性别有关.

【分析】

(1) 由题可得摸到同色两球的概率, 进而可得回答第一个问题的人数及选择“是”的人数, 再利用古典概型概率公式即得;

(2) 通过计算 K^2 , 进而即得.

$$(1) \text{ 因为摸到同色两球的概率 } P = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{2}{5},$$

$$\text{所以回答第一个问题的人数为 } 300 \times \frac{2}{5} = 120, \text{ 回答第二个问题的人数为 } 180. \quad (3$$

分)

因为男女人数相等, 是等可能的,

$$\text{所以回答第一个问题, 选择“是”的同学人数为 } 120 \times \frac{1}{2} = 60,$$

则回答第二个问题, 选择“是”的同学人数为 10,

$$\text{所以估计中学生在考试中有作弊现象的概率为 } \frac{10}{180} = \frac{1}{18}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 由题知, 2×2 列联表如下:

	男生	女生	合计
有作弊现象	15	5	20
没有作弊现象	135	145	280
合计	150	150	300

因为 $K^2 = \frac{300 \times (15 \times 145 - 5 \times 135)^2}{150 \times 150 \times 20 \times 280} = \frac{75}{14} \approx 5.357 > 5.024$, (10分)

所以有 97.5% 的把握认为中学生在考试中有无作弊现象与性别有关. (12分)

21. (12分)

【答案】(1) $\frac{y^2}{2} + x^2 = 1$ (2) $x_p \cdot x_q$ 为常数, 值为 1

【分析】

(1) 由直线 AC 与直线 BC 斜率之积为 -2, 建立等式得 $-\frac{a^2}{b^2} = -2$, 再结合 $a^2 - b^2 = 1$ 可求解;

(2) 设直线 $l: x = ty + m (m \neq 0)$, 则 $x_p = m$, 再根据直线 AC 与直线 BD 可得 $x_q = \frac{1}{m}$, 从

而可得 $x_p \cdot x_q$ 为常数.

(1) 由题 $A(-b, 0)$, $B(b, 0)$, 设 $C(x_1, y_1)$,

$$\text{则 } k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{y_1}{x_1 + b} \cdot \frac{y_1}{x_1 - b} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - b^2} = \frac{a^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{b^2}\right)}{x_1^2 - b^2} = -\frac{a^2}{b^2} = -2, \quad (2 \text{分})$$

$$\therefore a^2 = 2b^2, \text{ 又 } a^2 - b^2 = 1, \quad \therefore a = \sqrt{2}, \quad b = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } M \text{ 的方程为: } \frac{y^2}{2} + x^2 = 1. \quad (4 \text{分})$$

(2) 直线 l 若过原点, 由对称性知 $AC \parallel BD$ 不合题,

设直线 $l: x = ty + m (m \neq 0)$, 则 $x_p = m$

$$\begin{cases} x = ty + m \\ \frac{y^2}{2} + x^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得 } (2t^2 + 1)y^2 + 4mty + 2m^2 - 2 = 0, \quad (6 \text{分})$$

$$\text{设 } D(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = 8(2t^2 - m^2 + 1) > 0 \\ y_1 + y_2 = \frac{-4tm}{2t^2 + 1} \quad \therefore y_1 y_2 = \frac{1 - m^2}{2tm} (y_1 + y_2) \text{ ①} \\ y_1 y_2 = \frac{2m^2 - 2}{2t^2 + 1} \end{cases}$$

$$AC: y = \frac{y_1}{x_1 + 1} (x + 1) \text{ ②}, \quad BD: y = \frac{y_2}{x_2 - 1} (x - 1) \text{ ③} \quad (8 \text{分})$$

$$\text{②③联立得 } \frac{x-1}{x+1} = \frac{y_1(x_2-1)}{y_2(x_1+1)} = \frac{y_1(ty_2+m-1)}{y_2(ty_1+m-1)} = \frac{t_1 y_2 + (m-1)y_1}{t_1 y_2 + (m+1)y_2} \quad (10 \text{分})$$

$$\text{①代入得 } \frac{x-1}{x+1} = \frac{(1-m)[(1-m)y_1 + (1+m)y_2]}{(m+1)[(1-m)y_1 + (1+m)y_2]} = \frac{1-m}{1+m}$$

解得 $x = \frac{1}{m}$, 即 $x_Q = \frac{1}{m}$ $\therefore x_P \cdot x_Q = m \cdot \frac{1}{m} = 1$, (12分)

$\therefore x_P \cdot x_Q$ 为常数, 值为 1.

22. (12分)

【答案】(1) $n = -1$ (2) 1

【分析】

(1) 求定义域, 求导, 得到 $F(x)$ 在 $x = e^{1-n}$ 处取得极大值, 也是最大值, 进而列出方程,

求出 $n = -1$; (2) 参变分离后, 利用隐零点得到 $h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}$ 在 $x = x_2$ 处取得极大值, 也

是最大值, 令 $\phi(x) = \frac{\ln x}{e^{x-3}}$, $x \in \left(\frac{7}{2}, 4\right)$, 求出最大值的范围, 确定实数 m 的最小整数值.

(1) $F(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x + n}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$F'(x) = \frac{1 - \ln x - n}{x^2}$, (2分)

当 $0 < x < e^{1-n}$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x > e^{1-n}$ 时, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $x = e^{1-n}$ 处取得极大值, 也是最大值,

所以 $F(x) = \frac{1 - n + n}{e^{1-n}} = \frac{1}{e^2}$, 解得: $n = -1$; (4分)

(2) $\frac{me^{x-1}}{e^2} > x(\ln x - 1)$, 即 $me^{x-3} > x(\ln x - 1)$,

$m > \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}$, 令 $h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}$, 定义域为 $(0, +\infty)$, (5分)

$h'(x) = \frac{\ln x - x \ln x + x}{e^{x-3}}$,

令 $\phi(x) = \ln x - x \ln x + x$, $x > 0$

则 $\phi'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \frac{1}{x} - \ln x$,

可以看出 $\phi'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

又 $\phi'(1) = 1 > 0$, $\phi'(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$,

由零点存在性定理可知: $\exists x_0 \in (1, 2)$, 使得 $\phi'(x_0) = 0$, 即 $\frac{1}{x_0} = \ln x_0$, (7分)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\phi'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\phi'(x) < 0$,

$\phi(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值, 也是最大值,

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi(x_0) = \ln x_0 - x_0 \ln x_0 + x_0 = \frac{1}{x_0} - 1 + x_0 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 1 = 1,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - 1 < 0, \quad \varphi\left(\frac{7}{2}\right) = \ln \frac{7}{2} - \frac{7}{2} \ln \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \ln \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \left(7 - 5 \ln \frac{7}{2}\right) > 0,$$

$$\varphi(4) = 4 - 6 \ln 2 < 0,$$

$$\text{故存在 } x_1 \in \left(\frac{1}{e}, x_0\right), \quad x_2 \in \left(\frac{7}{2}, 4\right), \text{ 使得 } \varphi(x_1) = 0, \varphi(x_2) = 0, \quad (8 \text{ 分})$$

所以当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $\varphi(x) < 0$,

所以 $h'(x) = \frac{\ln x - x \ln x + x}{e^{x-3}}$ 在 $x \in (x_1, x_2)$ 上大于 0, 在 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 上小于 0,

所以 $h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}$ 在 $x \in (x_1, x_2)$ 单调递增, 在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递减, (9 分)

且当 $x < e$ 时, $h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}} < 0$ 恒成立,

所以 $h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}$ 在 $x = x_2$ 处取得极大值, 也是最大值, 其中 $\ln x_2 - x_2 \ln x_2 + x_2 = 0$,

$$h(x_2) = \frac{x_2(\ln x_2 - 1)}{e^{x_2-3}} = \frac{\ln x_2}{e^{x_2-3}}, \quad x_2 \in \left(\frac{7}{2}, 4\right) \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \phi(x) = \frac{\ln x}{e^{x-3}}, \quad x \in \left(\frac{7}{2}, 4\right)$$

$$\phi'(x) = \frac{1 - \ln x}{e^{x-3}}, \quad \text{当 } x \in \left(\frac{7}{2}, 4\right) \text{ 时, } \phi'(x) = \frac{1 - \ln x}{e^{x-3}} < 0,$$

$$\text{故 } \phi(x) < \frac{\ln \frac{7}{2}}{e^{\frac{7}{2}-3}} < 1, \quad (12 \text{ 分})$$

所以实数 m 的最小整数值为 1.

【点睛】

对于函数隐零点问题, 要结合零点存在性定理得到隐零点的大致范围, 然后对函数值进行变形, 最后确定函数值的取值范围, 确定参数的取值范围.