

2022 届高三数学五月调研测试热身训练三

班级_____姓名_____学号_____得分_____

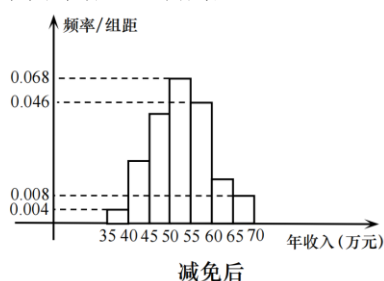
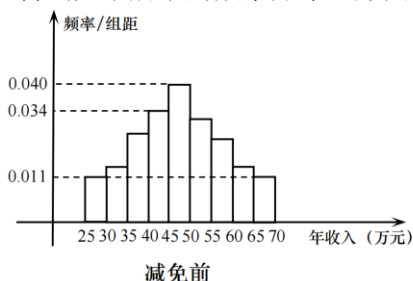


一、单选题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共计 25 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

- 若命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 1 \geq 0$ ”为真命题，则实数 a 的取值范围为 ()
 A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a \leq 0$ D. $a \leq 1$
- 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题：“今有人持金出五关，前关二税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一，并五关所税，适重一斤。问本持金几何？”其意思为“今有人持金出五关，第 1 关收税金为持金的 $\frac{1}{2}$ ，第 2 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{3}$ ，第 3 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{4}$ ，第 4 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{5}$ ，第 5 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{6}$ ，5 关所收税金之和恰好重 1 斤。问原来持金多少？”。记这个人原来持金为 a 斤，设 $f(x) = \begin{cases} 10x + 1, & x > 1 \\ 1 - 5x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，则 $f(a) =$ ()
 A. -5 B. 7 C. 13 D. 26
- 甲乙两选手进行象棋比赛，已知每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，若采用三局二胜制，则甲最终获胜的概率为 ()
 A. 0.36 B. 0.352 C. 0.288 D. 0.648
- 已知函数 $f(x) = \sin 2\omega x - \cos 2\omega x + 1$ ($0 < \omega < 1$)，将 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，然后再向下平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 图象关于 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称，则 ω 为 ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
- 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，若 $a = f\left(\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ， $b = f\left(\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ， $c = f\left(-3^{-\frac{4}{3}}\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 某市为了更好的支持小微企业的发展，对全市小微企业的年税收进行适当的减免，为了解该地小微企业年收入的变化情况，对该地小微企业减免前和减免后的年收入进行了抽样调查，将调查数据整理，得到如下所示的频率分布直方图，则下列结论正确的是 ()



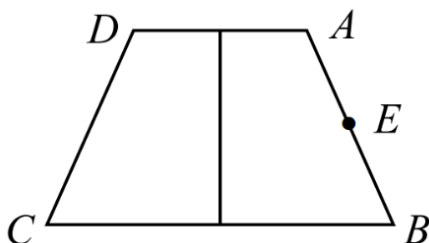
- A. 推行减免政策后, 某市小微企业的年收入都有了明显的提高
 B. 推行减免政策后, 某市小微企业的平均年收入有了明显的提高
 C. 推行减免政策后, 某市小微企业的年收入更加均衡
 D. 推行减免政策后, 某市小微企业的年收入没有变化

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , $M(\frac{4}{3}, y_0)$ 为椭圆 C 上一点, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 6
 B. $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$
 C. $\triangle MF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $\frac{\sqrt{15}}{9}$
 D. $\triangle MF_1F_2$ 的外接圆的直径为 $\frac{32}{11}$

8. 已知圆台的轴截面如图所示, 其上、下底面半径分别为 $r_{\text{上}} = 1, r_{\text{下}} = 2$, 母线 AB 长为 2, E 为母线 AB 中点, 则下列结论正确的是 ()

- A. 圆台母线 AB 与底面所成角为 60°
 B. 圆台的侧面积为 12π
 C. 圆台外接球半径为 2
 D. 在圆台的侧面上, 从 C 到 E 的最短路径的长度为 5



三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9. $(x - 2y)^5$ 的展开式中 $x^2 y^3$ 的系数是 _____. (用数字作答)
10. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 若 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\sin \alpha =$ _____.
11. 截角四面体 (亦称 “阿基米德多面体”) 的表面由四个正三角形和四个正六边形组成, 它是由一个正四面体分别沿每条棱的三等分点截去四个小正四面体而得到的几何体. 若一正四面体的棱长为 3, 则由其截得的截角四面体的体积为 _____.
12. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - e^x$, 若函数 $h(x) = f(x - 4) + x$, 则函数 $h(x)$ 的图象的对称中心为 _____; 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11} = 44$, 则 $h(a_1) + h(a_2) + \cdots + h(a_{11}) =$ _____. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本大题共 4 小题, 共 46 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任何两个数都不在下表的同一列, $\{b_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = b_3 - 2b_1$, $S_7 = 7a_3$.

	第一列	第二列	第三列
第一行	1	5	2
第二行	4	3	10
第三行	9	8	20

- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
 (2) 若 $c_n = [\lg b_n]$, 其中 $[x]$ 是高斯函数, 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[\lg 2] = 0$,

$[\lg 98] = 1$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项的和 T_{100} 。

14. 如图①，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AD = BC = CD = 2$ ， $AB = 4$ ， E 为 AB 的中点，以 DE 为折痕把 ADE 折起，连接 AB ， AC ，得到如图②的几何体，在图②的几何体中解答下列两个问题。

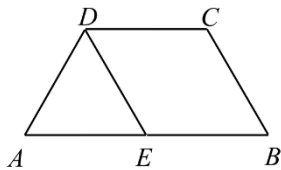
(1) 证明： $AC \perp DE$ ；

(2) 请从以下两个条件中选择一个作为已知条件，求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值。

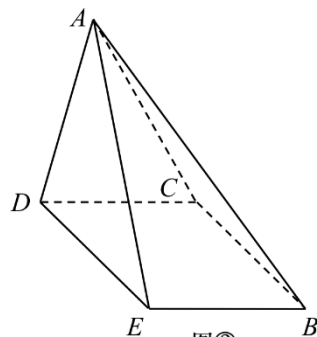
①四棱锥 $A-BCDE$ 的体积为 2；

②直线 AC 与 EB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 。

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分。



图①



图②

15. 规定抽球试验规则如下：盒子中初始装有白球和红球各一个，每次有放回的任取一个，连续取两次，将以上过程记为一轮．如果每一轮取到的两个球都是白球，则记该轮为成功，否则记为失败．在抽取过程中，如果某一轮成功，则停止；否则，在盒子中再放入一个红球，然后接着进行下一轮抽球，如此不断继续下去，直至成功．

（1）某人进行该抽球试验时，最多进行三轮，即使第三轮不成功，也停止抽球，记其进行抽球试验的轮次数为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望；

（2）为验证抽球试验成功的概率不超过 $\frac{1}{2}$ ，有 1000 名数学爱好者独立的进行该抽球试验，记 t 表示成功时抽球试验的轮次数， y 表示对应的人数，部分统计数据如下：

t	1	2	3	4	5
y	232	98	60	40	20

求 y 关于 t 的回归方程 $y = \frac{\hat{b}}{t} + a$ ，并预测成功的总人数（精确到 1）；

（3）证明：

$$\frac{1}{2^2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \frac{1}{3^2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}.$$

附：经验回归方程系数： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ ， $a = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1.46$ ， $\bar{x} = 0.46$ ， $\bar{x}^2 = 0.212$ （其中 $x_i = \frac{1}{t_i}$ ， $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ ） .

16. 已知函数 $f(x) = e^x + \sin x - \cos x - ax$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - \ln(1-x)$, 若 $g(x) \geq 0$, 求 a 的值.