



维过程,特别是学生易错的思维过程,而总是由教师“直接告知”;让学生自学、阅读时,没有具体的任务要求^[2];板书设计不合理,缺乏条理性、规范性、完整性、示范性,导致学生错误“模仿”等.从学生角度出发,学生缺乏主动思考、探究的习惯;心理素质差,因紧张看错题目或者誊写错误,甚至因紧张、焦虑出现“记忆短路”;做题时心浮气躁,不能沉着冷静地分析题目的条件及所求;不擅于利用图形辅助分析和解题;思维不严谨,逻辑性差;没有认真对待解题的各个环节(理解题目、拟定方案、执行方案、回顾):审题过快(题意不清,就提笔作答),方案拟定不佳(没有从不同角度思考,导致所选解法过于繁琐),不擅于回头验证(导致运算频频出错)等等.

学情、教情不同,原因各异,为了更有效地规避“懂而不会”现象的发生,做为数学教师,应予以重视,把数学学习中“懂而不会”现象当作一个课题进行研究.

参考文献

[1] 徐存新,武瑞雪.浅谈高中数学教学中的变式题教学——以消除懂而不会现象为例[J].中国数学教育,2016(12).
[2] 武瑞雪,陈莹,徐存新,管勇.因“教师不会教”致教学低效之现象剖析[J].中国数学教育,2016(6).

作者简介 宁永楠(1984—),女,大学本科,中小学一级教师.

高中数学多选题的命制实践与研究*

济南市教育教学研究院 250014 安学保
山东师范大学附属中学 250014 王介花

【摘要】继上海、浙江之后,2017 年山东省成为了第二批高考综合改革试点省市.为了迎接新高考,笔者研究了高中数学多项选择题的命制方法,通过对多选题的命制实践以及学生答题数据分析,总结了多项选择题的命制和答题策略.

【关键词】多项选择题;命制;答题策略

1 问题提出

高考恢复 40 多年来,不断尝试着新题型的探索实践.数学多选型选择题(以下简称多选题)因为具有命题方式多样、考查容量大、能够涵盖多种数学核心素养、能够更好地区分学生不同的素养水平等特点,所以近年来受到命题者的追捧.在新课程、新高考、新课标和新教材的背景下,多选题以其优越性可能会在数学评价中闪亮登场.

2 多选题的命制

笔者研究了数学单选题和多选型填空题,同时也研究了物理等其他学科多选题的命制方式,总结了四条数学多选题的命制方法.

从立意上看,多选题是数学核心素养的集中展示,可以是四基(基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验)的体现也可以是四能(发现问题、提出问题、分析问题、解决问题)的考查.多选题可以直接考查学生的基础知识、基本技能的掌握情况,也可

以考查基本思想和基本活动经验,测评学生分析问题和解决问题的能力,还可以设计新运算、新概念等新情境问题,测评学生发现问题和提出问题的能力.

多选题应该有合适的试题情境,有相应的题干和背景,而不是把单选题简单地变为多选题,更不是对现有的单选题直接进行否定而得到的.

多选题应该是同一情境下多个结论的判断,而不是把一些知识点凑在一起、把几个不相关的真命题和假命题放在一起类似于拼盘式的大杂烩.

多选题的每一个选项都经过精心设计,选项与选项之间具有知识的内在联系或者方法的相通性.

3 命制实践与分析

山东省 2018 级高中学生将会参加新课程标准指导下的新高考,为增强学生对多选题的认识,积累做题经验,同时了解和诊断济南市高中学生对数学多选题的认知基础,笔者在全市高一年级上学期学习质量评估考试试题中尝试进行了多选题的命制与

* 本文系山东省教育科学“十二五”规划课题“基于高中数学核心素养的教学与评价研究”(立项编号:YJ15037)的阶段性成果.



考查.

整套试题共 5 页,23 道题,全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟. 全卷试题类型包括:单项选择题、多项选择题、填空题和解答题. 多项选择题的导语为“本大题共 3 小题,每小题 4 分,共 12 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 4 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.” 多选题如下:

11. 下面说法中错误的是().

A. 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线都可以用方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 表示

B. 经过定点 $P(x_0, y_0)$ 的直线都可以用方程 $x - x_0 = m(y - y_0)$ 表示

C. 经过定点 $A(0, b)$ 的直线都可以用方程 $y = kx + b$ 表示

D. 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 表示

E. 经过任意不同的点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$ 表示

命题意图 本题是一个综合判断型问题,意在考查逻辑推理素养,考查学生对直线方程的五种形式的理解,理解每种形式方程的使用限制条件.

答案是 ABCD.

12. 如图, PA 垂直于以 AB 为直径的圆所在平面, 点 C 是圆上异于 A, B 的任一点, 则下面结论中正确的是().

A. $PB \perp AC$

B. $PC \perp BC$

C. $AC \perp$ 平面 PBC

D. 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC

E. 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC

命题意图 本题是一个分析论证题,重点考查直观想象和逻辑推理素养,考查学生对线线垂直、线面垂直和面面垂直的推导证明和相互转化.

答案是 BE.

13. 定义“正对数”: $\ln^+ x = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 若 $a > 0, b > 0$, 则下面结论中正确的是().

A. $\ln^+(a^b) = b \ln^+ a$

B. $\ln^+(ab) = \ln^+ a + \ln^+ b$

C. $\ln^+\left(\frac{a}{b}\right) \geq \ln^+ a - \ln^+ b$

D. $\ln^+(a + b) \geq \ln^+ a + \ln^+ b$

E. $\ln^+(a + b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2$

命题意图 本题给出了一个新概念,属于信息创新型问题,意在考查逻辑推理和数学抽象素养,考查学生对新概念的理解和运用.

答案是 ACE.

本次考试在 2019 年 1 月 22 日举行. 最终参与统计的是济南市 42 所中学,实际考试人数是 35835 人. 学生采取答题卡答题的形式考试. 单选题和多选题是系统阅卷,其他题目由教师采取网上阅卷. 各学校任课教师为阅卷教师,与学生同时进行试题作答并完成相应的教师问卷. 下面根据得分情况逐题分析学生的做题情况.

表 1 多选题 11 题作答情况统计

选择 ABCD (4 分)	选择一个正确选项 (2 分)	选择两个正确选项 (2 分)	选择三个正确选项 (2 分)	其他选项 (0 分)
0.034	0.510	0.219	0.095	0.142

通过表 1 可以看出,11 题得 4 分的学生不多,但是得 2 分的学生比例能够占到 0.824. 对比可以看出,选择一个正确选项、选择两个正确选项、选择三个正确选项得 2 分的学生人数依次构成递减数列,一半以上的学生是选择了一个正确选项得 2 分.

分析上述数据可以得出这个题目区分度很好,能够很好地区分出不同素养水平的学生. 得 4 分的学生共有 1223 人,素养水平最高,得 2 分的学生处于中等素养水平,得 0 分的学生不足两成,素养水平一般,数据呈现正态分布. 但是现行的赋分方式无法区分出选择一个正确选项和选择多个正确选项的学生的素养水平,显然这部分学生是具有明显差异的.

表 2 多选题 12 题作答情况统计

选择 BE (4 分)	选择一个正确的选项 (2 分)	其他选项 (0 分)
0.155	0.240	0.605

通过表 2 可以看出,12 题得 4 分的学生比例是 11 题的四倍半,得 2 分的学生比例明显低于 11 题. 有 6 成的学生得 0 分. 上述数据分析说明学生对这个题目的认知度高,所以得 4 分的学生人数明显增多,这部分学生掌握的基础知识和素养水平都是非常突出的. 得 2 分的学生比例偏低,反而有 6 成的学生得 0 分,说明这个题的区分度不够,这种得分分布的原因还可能是答题策略的问题.

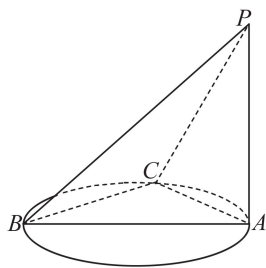




表 3 多选题 13 题作答情况统计

选择 ACE (4 分)	选择一个正确的 选项(2 分)	选择两个正确的 选项(2 分)	其他选项 (0 分)
0.014	0.392	0.050	0.544

通过表 3 可以看出,13 题得 4 分的学生少,得 2 分的学生中几乎都是选择一个正确的选项,得 0 分的学生超过一半. 上述分析说明这个题难度大,素养水平高的学生会这个题就能够得 4 分,素养水平居中的学生能选择出一个或者两个正确选项. 此题对素养水平一般的学生不具有区分度了.

4 答题策略

笔者通过问卷调查和访谈,了解和汇总了学生对于多选题的认识以及答题策略.

第一,学生对数学多选题抱有非常高的期望. 他们认为,多选题的得分率大于单选题,增加多选题的考查后能够提高自己的得分率,但实际测评结果恰好相反.

第二,部分学生表示,如果不确定选项的正确与否,那就当作单选题来做只选择一个选项,不会冒险选取多个选项争取 4 分. 但是学生同时也表示,对于会的问题还是会采取积极的得分策略,选择多个选项争取全部做对题目.

笔者访谈还发现了 12 题得分分布背后的秘密,那就是学生答题的心态和策略. 部分中等素养水平的学生认为会做这个题,所以在做这个题的时候并没有采取保守的选一个选项得 2 分的方法,而是选择多个选项努力争取得 4 分,但是结果出现了错选

的情况,导致得 0 分. 这也反映出学生的知识薄弱点,对空间中的垂直关系掌握的不够扎实,感觉会做的题结果在考试中没得分.

5 小结

通过本次多选题的命题实践与研究,笔者认为多选题的素材选择以及选项的设计至关重要,另外多选题选项的个数设置为 4 个可能更好,这样能够适当减少试题的思维量和学生的答题时间;还有多选题的赋分标准有待于商榷. 多选题区分于单选题,应该鼓励学生选择多个选项,更好地发挥它的区分度,因此建议多选题的赋分标准设置为:“全部选对的得 4 分,有选错的得 0 分,选择一个正确选项的得 1 分,选择多个正确选项的得 2 分.”

参考文献

[1] 任子朝,章建石,陈昂.高考数学新题型测试研究[J]. 数学教育学报,2015(2):21-24.
[2] 任子朝,陈昂,黄熙彤,赵轩.新高考数学多选题考查功能研究[J].中国数学教育(上),2019(1-2):3-5.
[3] 王文雅,李玉长.高考数学中“多选题”的类型分析[J]. 新课程学习(下),2015(5):97-98.
[4] 何小亚.学生“数学素养”指标的理论分析[J].数学教育学报,2015(1):13-20.

作者简介 安学保(1975—),男,中学高级教师. 济南市教育教學研究院評估部副主任.

王介花(1982—),女,中学高级教师,教育硕士.

一类几何问题初高中解法的对比分析与反思

广东省广州市增城中学 511300 邓 城

1 引子

2019 年高考数学全国 1 卷的选择题第四题有关“维纳斯身高”的问题引起了各方热议,笔者注意到网络上有人说该题是初中题目,甚至有人说这题小学生都可以做. 笔者认为小学生能否做存在争议(有些优秀的小学生当然没问题),但本题拿给初中生做并没有超出知识范围,因为本题考查的知识点主要是比例、不等式等问题,而对于黄金比例这个数学知识(文化),许多版本的初中教材都有提到,因此说此题初中生能做是没问题的. 事实上有部分题

目特别是一些平面几何问题,既可以用高中教材讲到的知识和方法去做,也可以用初中教材所讲的知识和方法去做,两类方法的思维差异何在? 对教学有什么启示?

笔者自工作以来在高中从教十三年,直到去年到农村初中支教一年,担任初三数学的教学工作,对初高中考试或练习中都可以出现的一类平面几何问题进行了初步的研究,也收获了几点教学上的感悟,现整理分享如下,权当抛砖引玉.

2 例题分析



例1 如图1, F 为正方形 $ABCD$ 边 CD 上一点, 连接 AC 、 AF , 延长 AF 交 AC 的平行线 DE 于点 E , 连接 CE , 且 $AC = AE$. 求证: $CE = CF$.

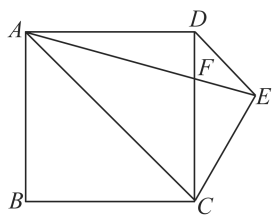


图1

思路分析 初高中的知识储备不一样, 导致了解题分析的视角不一样. 高中生见到这个题目的已知条件, 注意到已知条件中 AD 和 AE 的长度是有关系的, 又易得 $\angle ADE = 135^\circ$, 因而容易从综合法的角度分析问题, 利用已知条件在 $\triangle ADE$ 中使用高中熟悉的正弦定理来得出 $\sin \angle AED = \frac{1}{2}$, 进而得到 $\angle CFE = \angle CEF = 75^\circ$, 即证 $CE = CF$.

高中解法 由已知条件易知 $\angle ADE = 135^\circ$, $AE = AC = \sqrt{2}AD$, 在 $\triangle ADE$ 中, 由正弦定理有 $\frac{AD}{\sin \angle AED} = \frac{AE}{\sin \angle ADE}$, 化简得 $\frac{AD}{\sin \angle AED} = \frac{\sqrt{2}AD}{\sin 135^\circ}$, 所以 $\sin \angle AED = \frac{1}{2}$, 即得 $\angle AED = 30^\circ$, 因为 $AE = AC$, 所以 $\angle FEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$, 又因为 $\angle EFC = \angle FAC + \angle ACF = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$, 所以 $\angle FEC = \angle EFC$, 所以 $CE = CF$.

而对于初中生来说, 要证明 $CE = CF$ 往往是证明两边的对角相等, 如果 $\angle EAC$ 的大小能求出则问题得到破解. 由经验可知初中阶段求解的角一般都是特殊角, 如 30° 和 45° 等, 并且在求角的过程中往往需要构造直角三角形, 结合本题中 $DE \parallel AC$ 的条件, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于 H , 构建出直角三角形 $\triangle AEH$ 容易发现 $EH = \frac{1}{2}AE$, 从而得出 $\angle EAC = 30^\circ$.

初中解法 过点 E 作 $EH \perp AC$, 垂足为 H , 如图2所示. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $EH = AD \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$, 又因为 $AE = AC = \sqrt{2}AD$, 所以 $EH = \frac{1}{2}AE$, 所以 $\angle EAH$

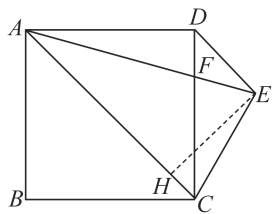


图2

$= 30^\circ$, 因为 $AE = AC$, 所以 $\angle FEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} =$

75° , 又因为 $\angle EFC = \angle FAC + \angle ACF = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$, 所以 $\angle FEC = \angle EFC$, 即证 $CE = CF$.

点评 高中解法关注三角形中的边与角是否存在数量关系, 而不太关注边与角的条件是否足够特殊, 而初中解法由于只能用最基本的定理和性质来解决问题, 所以更关注题目条件的特殊性, 以此为突破口并结合基本活动经验来处理问题.

例2 如图3, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 20^\circ$, 点 D 在 AB 上, 且有 $\angle BDC = 30^\circ$, 求证: $AD = BC$.

思路分析 对于高中生来说, 注意到已知条件中有边的关系, 又有角的条件, 容易想到利用正弦定理来寻找 AD 、 BC 的关系.

高中解法 因为 $AB = AC$ 且 $\angle BAC = 20^\circ$, 所以 $\angle B = \angle ACB = 80^\circ$, 因为 $\angle BDC = 30^\circ$, 所以 $\angle DCA = \angle BDC - \angle BAC = 10^\circ$.

在 $\triangle ACD$ 中由正弦定理有 $\frac{DC}{\sin 20^\circ} = \frac{AD}{\sin 10^\circ}$, 所以 $AD = \frac{1}{2\cos 10^\circ}DC$.

在 $\triangle BCD$ 中由正弦定理有 $\frac{DC}{\sin 80^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$, 所以 $BC = \frac{1}{2\cos 10^\circ}DC$, 所以 $AD = BC$.

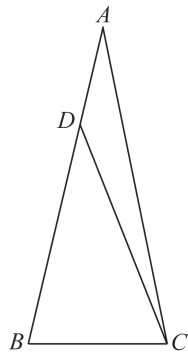


图3

而对于初中生来说, 证明两条边的长度相等往往需要证明两边所在的两个三角形全等, 而其中的难点在于往往需要添加辅助线构造三角形. 对于此题来说, 还不能直接构造两个三角形, 需要注意到已知条件中几个角的特殊关系, 结合 $\triangle ABC$ 是个等腰三角形的条件, 添加几条辅助线构造两个直角三角形.

初中解法 过点 A 作 BC 的垂线, 垂足为 E . 过点 A 作 CD 的垂线, 垂足为 F , 如图4所示.

因为 $AB = AC$ 且 $AE \perp BC$, 所以 $BE = EC$, $\angle EAC = 10^\circ$.

因为 $\angle BDC = 30^\circ$, 所以 $\angle DCA = \angle BDC - \angle BAC = 10^\circ$.

又因为 $\angle AFC = \angle AEC = 90^\circ$ 且 $AC = AC$, 所以 $\triangle AFC \cong \triangle AEC$, 所以 $AF = EC$.

因为 $\angle BDC = 30^\circ$ 且 $\angle AFD =$

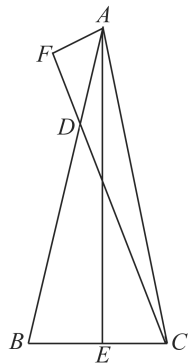


图4



90°, 所以 $AD = 2AF$, 又因为 $BC = 2EC$, 所以 $AD = BC$.

点评 高中解法是一种从定量的角度处理的方法, 只要借助正余弦定理或者勾股定理沟通已知条件与所求目标的关系, 后面基本是常规的化简运算. 所以从高中解法的角度来说, 例 1 和例 2 的解题思想都是一样的, 两个题目本质上属于同一类型题; 而对于初中解法来说需要从条件的特殊性出发, “量身定制”必要的辅助线, 选择恰当的解题方法. 通过例 1 和例 2 的具体解答可以发现, 因为题目条件的不同, 两题初中解法的具体思路和解法还是有很大差异的.

例 3 如图 5, $AB = AC$, $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, $AD = 1$, $CD = 3$, 求 BD 的长度.

思路分析 从高中生思维角度出发, 由已知条件 $AD = 1$, $CD = 3$ 和 $\angle ADC = 45^\circ$ 容易想到使用余弦定理可以求出 AC , 这样要求 BD 只需在 $\triangle ABD$ 中再一次应用余弦定理即可.

高中解法 在 $\triangle ADC$ 中由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \angle ADC = 10 - 3\sqrt{2}$, 所以 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle BAD = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos(90^\circ + \angle DAC) = 1 + 10 - 3\sqrt{2} + 2AD \cdot AB \cdot \sin \angle DAC = 11 - 3\sqrt{2} + 2AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC = 11 - 3\sqrt{2} + 4S_{\triangle ADC} = 11 - 3\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \sin 45^\circ = 11$, 所以 $BD = \sqrt{11}$.

而此题对于初中生来说, 求解目标 BD 的基本活动经验是往往需要借助 BD 所在的一个直角三角形使用勾股定理来解决, 然而本题的难点在于现有已知条件中并没有含 BD 边的直角三角形, 这需要学生自己去构造出来.

初中解法 过点 A 作 $AE \perp AD$ 交 DC 于 E , 因为 $\angle ADC = 45^\circ$, $AE \perp AD$, 所以 $\angle AED = 45^\circ$, 所以 $\triangle ADE$ 是等腰三角形, 所以 $AD = AE$, $DE = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}$.

因为 $AD = AE$, $AB = AC$, $\angle DAC = 90^\circ + \angle CAE = \angle EAB$, 所以 $\triangle ADC \cong \triangle AEB$, 所以 $BE = CD = 3$ 且 $\angle AEB = \angle ADC = 45^\circ$, 所以 $\angle DEB = \angle DEA + \angle AEB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

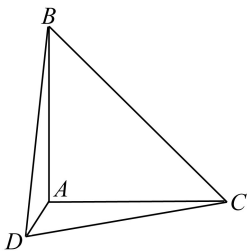


图 5

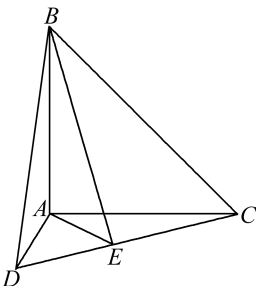


图 6

在 $\triangle DEB$ 中, 由勾股定理有 $BD = \sqrt{DE^2 + EB^2} = \sqrt{2 + 9} = \sqrt{11}$.

点评 本题的高中解法思路非常清晰, 容易入手, 计算量也不大. 而初中解法的本质思路可以看成是基于 $\triangle BAC$ 是等腰直角三角形以及 $\angle ADC = 45^\circ$ 这种特殊条件, 可以考虑将 $\triangle ADC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle AEB$, 然后证明 $\triangle DEB$ 是直角三角形. 事实上按照利用旋转三角形解决几何问题的思想^[1], 本题还可以将 $\triangle DAB$ 绕点 A 顺时针旋转 90° , 后面解答过程类似. 通过对比不难发现, 高中解法强调的是通过代数角度寻找到边与角之间的关系, 是一种通法; 初中解法虽然强调利用构建直角三角形通过勾股定理解决问题这种常规思路, 但在此类并没有直角三角形作为已知条件的问题中, 往往需要一些添加辅助线的技巧, 并且能使用这些技巧还需观察到这个条件所具备的特殊性. 正是因为这个原因, 此题放在初中阶段属于难度较大的题目.

例 4 如图 7, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, AD 上的点, 且 $EF = DF + BE$, 求 $\angle ECF$ 的度数.

思路分析 从高中生思维出发, 一看目标是求角就能自然想到利用余弦定理求 $\angle ECF$ 的余弦值, 接下来就是把 $\triangle ECF$ 的三条边表示出来, 剩下的事情就是计算.

高中解法 不妨设正方形的边长为 1, $DF = x$, $EB = y$, 因为 $EF = DF + BE$, 故有 $EF = x + y$, 在直角三角形 AEF 中由勾股定理有 $(x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$, 化简得 $x + y = 1 - xy$, 在 $\triangle CEF$ 中由余弦定理有 $\cos \angle ECF = \frac{(1 + x^2) + (1 + y^2) - (x + y)^2}{2\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$
$$= \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}} = \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + (1 - xy)^2 - 2xy + x^2y^2}}$$
$$= \frac{1 - xy}{\sqrt{2(1 - xy)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
, 所以 $\angle ECF = 45^\circ$.

从初中生的思维角度出发, 考虑到既然此题可以让初中生做, 那么 $\angle ECF$ 的度数一定是特殊角, 并且往往与已知条件的特殊角有关, 结合图象的直观想象, 容易猜想 $\angle ECF = 45^\circ$, 然而如何真正求解出这个角来却不容易想到. 从目标出发, 要证明 $\angle ECF = 45^\circ$ 可考虑证明 $\angle ECF = \angle ECB + \angle DCF$,



而 $\angle ECB$ 与 $\angle DCF$ 并不是挨在一起,所以可以考虑将其中一个角旋转到另一个角旁边,合并成一个新的角,然后再证明这个新的角与 $\angle ECF$ 相等,此时又可能需要先证明两个角所在的三角形全等.另外从已知的条件 $EF = DF + BE$ 也可以猜测到需要将 DF 和 EB 转到同一条线段上,这样便得到新的两边相等的条件,然后同样是考虑证明两边所在的三角形全等.结合目标所求和已有的特殊条件,将 $\triangle CDF$ 逆时针旋转 90° (或者将 $\triangle CEB$ 顺时针旋转 90°) 是破解此题的关键步骤.

初中解法 将 $\triangle CDF$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBG$,由旋转的性质有 $\angle CBG = 90^\circ$,即有 E, B, G 三点共线, $CF = CG, DF = BG, \angle DCF = \angle BCG$. 因为 $EF = DF + BE$,所以 $EF = DF + BE = BG + BE = EG$,又因为 $CE = CE$,所以 $\triangle CFE \cong \triangle CGE$,所以 $\angle ECF = \angle ECG$,又因为 $\angle ECG = \angle ECB + \angle BCG = \angle ECB + \angle DCF$,所以 $\angle ECF = \angle ECB + \angle DCF$,又因为 $\angle ECF + \angle ECB + \angle DCF = 90^\circ$,所以 $\angle ECF = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

点评 初中解法需要较强的技巧和解题经验,需要不断总结题型及对应的解题“套路”,而高中解法容易想到方法,但计算和化简的过程需要足够的耐心.

例 5 如图 9, $\angle MON = 90^\circ$, 矩形 $ABCD$ 的顶点 A, B 分别在边 OM, ON 上,当 B 在边 ON 上运动时, A 随之在边 OM 上运动,矩形 $ABCD$ 的形状保持不变,其中 $AB = 2, BC = 1$,运动过程中,点 D 到点 O 的最大距离为_____.

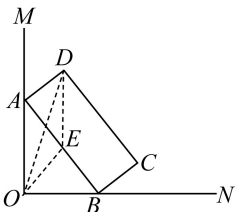


图 9

思路分析 对初中生来说,两点之间的距离问题往往会转化为跟固定长度的边长作比较,从矩形 $ABCD$ 的边长比例可以发现取 AB 的中点 E ,则有 $\triangle DAE$ 是等腰直角三角形,另外还有 EO 是直角三角形 AOB 斜边上的中线.

初中解法 取 AB 的中点 E ,连接 OE, DE, OD ,因为 $OD \leq OE + ED$,所以当 O, D, E 三点共线时,点 D 到点 O 的距离最大,因为 $AB = 2, BC = 1$,点 E 是 AB 的中点,所以 $AE = \frac{1}{2}AB = 1$,由勾股定理可得: $DE =$

$\sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{2}$,因为 $\angle MON = 90^\circ$ 且 E 是 AB 的中点,所以 $OE = \frac{1}{2}AB = 1$,所以点 D 到点 O 的最大距离为 $\sqrt{2} + 1$.

而对于高中生来说更加容易想到利用余弦定理来表示出 DO 的长度,然后通过函数的角度求最值.

高中解法 设 $\angle OAB = \theta$,则 $OA = 2\cos\theta$,由余弦定理有 $DO^2 = (2\cos\theta)^2 + 1 - 4\cos\theta\cos(\theta + 90^\circ) = 4\cos^2\theta + 1 + 4\sin\theta\cos\theta = 2(1 + \cos 2\theta) + 1 + 2\sin 2\theta = 3 + 2\sqrt{2}\sin(2\theta + 45^\circ) \leq 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$,所以 $DO \leq \sqrt{2} + 1$,当且仅当 $\theta = 22.5^\circ$ 时等号成立.

点评 对于本题显然是使用初中解法要简单直观,而使用高中解法的难点主要在于选取什么作为自变量,其次是表达出目标函数后求最值有些复杂,需要点耐心.

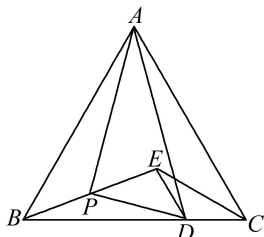


图 10

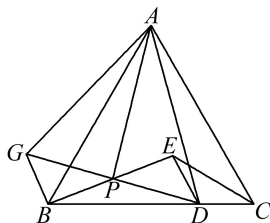


图 11

例 6 如图 10, E 为等边 $\triangle ABC$ 内的一点, CE 平分 $\angle ACB$, D 为 BC 边上的一点,且 $DE = CD$,连接 BE ,取 BE 的中点 P ,连接 AP, PD, AD ,试判断 AP 与 PD 的位置关系并求出 AP 与 PD 的数量关系.

思路分析 对于初中生来说,容易通过图形猜想到 $\angle APD = 90^\circ$,注意到 $\triangle ABC$ 是等边三角形,可以考虑尝试将 $\triangle ADC$ 绕点 A 旋转 60° ,得到新的图形后问题就迎刃而解了.

初中解法 如图 11,将 $\triangle ADC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AGB$,连接 PG .由旋转的性质有 $GB = DC, GA = DA, \angle GAD = 60^\circ, \angle ABG = \angle ACD$,又因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $\angle ACD = \angle BAC = 60^\circ$,所以 $\angle ABG = \angle BAC$,所以 $GB \parallel AC$,由已知易得 $ED \parallel AC$,所以 $GB \parallel ED$,又因为 $GB = DC = ED$,所以四边形 $GBDE$ 是平行四边形,因为 P 是 BE 中点,所以 $PG = PD$,又因为 $GA = DA$,所以 $AP \perp PD$,且有 $\angle PAD = \frac{1}{2}\angle GAD = 30^\circ$,所以 $AP = \sqrt{3}PD$.

而对于高中生来说,最直接的思路是将 AD, PD 和 AP 表达出来,然后通过余弦定理来判断 AP 与 PD 的数量关系.



高中解法 如图 12, 延长 CE 交 AB 于 G , 连接 GP . 因为 CE 平分 $\angle ACB$, 且 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $CG \perp AB$, 且 $AG = GB$. 因为 P 是 BE 的中点, 所以 $PG = PE = PB$, 不妨设 $AC = 1, DC = a$, 因为 $\angle ECD = 30^\circ$ 且 $DE = CD$, 所以 $EC = \sqrt{3}a$.

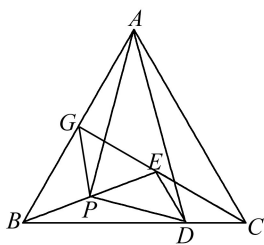


图 12

在 $\triangle ADC$ 由余弦定理得 $AD^2 = 1 + a^2 - a$, 在 $\triangle BEC$ 中由余弦定理有 $BE^2 = (\sqrt{3}a)^2 + 1 - 2\sqrt{3}a \cdot \cos 30^\circ = 3a^2 + 1 - 3a$, 所以 $PB^2 = \frac{BE^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$.

在 $\triangle BDE$ 中由中线性性质有 $4PD^2 + 4PB^2 = 2a^2 + 2(1 - a)^2$, 即有 $PD^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}$, 在 $\triangle ABP$ 中由中线性性质有 $4PG^2 + 4(\frac{1}{2})^2 = 2PA^2 + 2PB^2$, 即有 $PA^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}$, 故有 $PA^2 + PD^2 = AD^2$, 即有 $AP \perp PD$, 又因为 $PA^2 = 3PD^2$, 所以 $AP = \sqrt{3}PD$.

解法点评 初中解法的思路巧妙但是难以想到, 需要熟悉在特殊条件下应用旋转三角形的方法 (当然也可以直接构造全等三角形). 而高中解法的思路简单, 但要表达出三条边来涉及到多个量, 还要熟悉一些常见定理 (不用这些定理会更繁琐), 整个解法综合性强, 计算量大.

3 几点反思

3.1 中学数学教师要明晰自身对初高中几何及学生解题思维差异的理解.

众所周知, 教材的编写肯定是要符合学生不同年龄的思维发展水平的. 大部分初中生的几何思维基本还处于直观、感性的认知阶段, 所以初中教材中的几何内容介绍的都是最基本的几何定理和性质, 而且这些定理往往是特殊条件下才能成立的, 比如勾股定理的应用需要直角三角形的条件. 随着学生思维水平的发展, 高中的几何知识部分融入了更多的代数知识, 增强了知识应用的普适性, 比如说在将锐角三角函数拓展到重新定义的三角函数的基础上, 勾股定理被推广到了任意三角形都可以应用的余弦定理, 并衍生出沟通边、角和外接圆半径关系的正弦定理.

对于几何中的证明问题, 初中生主要借助直观

思维和联想思维来处理, 比如说要证明两条边相等, 可能就会在图形中寻找有没有两个三角形看起来全等, 如果感觉图形不够完整, 还会考虑添加辅助线构造新的图形. 而高中生则因为学习了正余弦定理, 对几何图形中边与角的数量条件会有更多的关注, 意图从代数的角度将边或角表达出来.

对于几何中的计算问题, 初中生往往只能借助于直角三角形的勾股定理、相似三角形以及旋转三角形的性质, 注重利用图形的特殊性来解决问题. 而高中生则习惯于借助正余弦定理通过代数 (方程) 的思想来表达和计算, 不再过度考虑图形条件是否特殊. 从数学的思想方法层面来看, 初中的解法往往基于特殊条件下利用特殊的定理和性质来解决问题, 而高中的解法则更加注重利用通性通法去解决问题, 当然初高中的解法差异主要是由于学习的内容层次不一样和学生的思维水平不一样决定的.

3.2 中学数学教师在几何部分知识的教学中应着眼于学生的思维发展.

对于初中数学教师来说, 部分优秀的初中生到了初三特别是中考复习时对初中几何的解题方法应该是非常熟悉了, 反复加以训练固然可以提升解题的速度, 但对于学生的思维水平来说并没有得到提高, 学习的兴趣和好奇心也得不到激发, 同时还浪费了宝贵的学习时间. 笔者认为可以考虑对少数优生因材施教, 将高中教材中的三角函数包括正余弦定理等知识提前讲授或让学生自学. 由于这部分高中知识与初中知识关联度大, 理解难度较小, 学习所需时间较短, 因此这些知识对于优秀的初中生是可以接受的, 并且可以让学生的数学思想得到较大程度的提高. 而对于高中数学教师来说, 也应该注意到学生用惯了通过正余弦定理等高中方法来处理几何问题会产生思维定势, 结果碰到像前面提到的有些例题时会遭遇因变量复杂和计算繁琐而难以为继的窘境, 因此在教学中应打破高中生僵硬的思维定势, 有针对性地选取一些初高中方法都可以做出来的题目, 让学生意识到面对具备特殊条件的几何问题, 应考虑尝试应用初中的几何方法, 完善学生的数学思维, 增强学生的应变能力.

参考文献

[1] 邓城. 利用旋转法妙解一类解三角形问题[J]. 中学教研 (数学), 2019(7): 23-25.

作者简介 邓城 (1983—), 男, 一级教师, 主要从事高中数学教学和研究工作.