高三复习如何提升数学思维能力

金 奎 张 丽

安徽省芜湖市十二中

【摘 要】高三的数学复习是在做大量的习题和多次的模拟考试中进行的，学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力有了一定的提高，但学生分析问题和解决问题的能力提高较弱，结果事倍功半。因此，教师必须研究数学复习方法，提高课堂教学效率。其中，利用习题的变式训练将一个题目适当变换、变化为多个与原题内容不同，但解法相同或相近的题目，有利于扩大学生视野，深化知识，举一反三，触类旁通，从而提高解题能力，更能激发学生学习数学的兴趣，增强求知欲。

【关键词】高三数学；变式；联系；效率

依据教师为主导、学生为主体、探究为主线、思维为核心的新课改教学思想，笔者认为要想提高高三数学复习的效率，达到提升学生思维能力的目的，就应从重视习题的变式训练开始。高三复习如果对一些内涵和外延比较丰富的题目不作适当引申、拓展组织教学，很多学生的学习会处于“知其然而不知其所以然”的状况，对知识的掌握缺乏系统性，很难对付“能力立意”的高考试题。

因此，在紧张的高三复习中，有必要提倡以一题多变的形式组织教学，从“变”中总结解题方法，从“变”中发现解题规律，从“变”中发现“不变”，引导学生多思多想，养成在学中求异，学中求变的习惯，使学生学一道题，会一类题，加深对问题实质的理解和掌握，增强应变能力，建构知识的条理性和系统性。

一、做好一题多变，重选题关

要做好选题工作，要求教师课外做足功夫，通过博览群书，钻研教材中的典型例题、习题，历年全国卷高考试题、模拟试题，新的课程标准、考纲等内容，然后精心挑选题目，认真比较、总结、反思和探索，才能在课堂上站在全局的高度把握相关的数学知识，提高复习的针对性和有效性。这正如宋朝大文学家苏轼所言：“博观而约取，厚积而薄发。”

二、做好一题多变，过变题关

选好题目以后，要做好“变”字文章，发挥例题的增值功能。“变”是一题多变的关键和核心，“变”的精髓和价值在于求证“为何要变”“如何去变”的过程，让学生在问题的认知、探索、发现、设计、解决、创造等全过程、全方位、深层次的主体性、实质性地参与，并从中获得对问题的深刻理解，不断促进解决新问题的能力因子的生成和积聚，达到元认知能力的本质提高，形成一种积极、主动、探究的高效学习方式，真正成为学习的主人。笔者结合自己的教学实践，总结出一题多变的两类常见变题方法。

（一）延伸拓宽，类比变题

类比变题，是指对原来问题条件或结论的知识载体进行类比引申，把相关知识进行迁移、运用，变出的问题结构与原题基本相同的一种变题方法。简言之，类比变题是由特殊到特殊的变题方法。类比推理的思想，是新课标新增加的一个知识点，因此，启发学生类比变题，不但能使学生对所学知识起到促进作用，同时对于开阔学生视野，举一反三，触类旁通，培养学生的发散思维和创新思维能力，都具有重要的作用。

例1：若函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为（ ）。

A、$\frac{\pi}{6}$　　B、$\frac{\pi}{4}$

C、$\frac{\pi}{3}$　　D、$\frac{\pi}{2}$

变式一、如果函数 $y=3\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为

变式二、如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{4\pi}{3}$ 对称 $|\varphi|$，那么 $|\varphi|$ 的最小值为

变式三、如果函数 $y=3\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{4\pi}{3}$ 对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为

通过这些变式及解答，既调动了学生的学习热情，又把三角函数的中心对称、轴对称问题做了系统的复习，同时比较了不同三角函数对称的异同点。

纵观高中数学，很多知识之间存在联系，可以类比的知识载体很多，如函数中的指数函数、对数函数、幂函数等方面的题目可以相互类比；数列中的等差数列与等比数列的题目可以相互类比；椭圆、双曲线、抛物线甚至是圆方面的题目可以相互类比；平面几何问题与立体几何问题可以相互类比等等。因此，只要教师善于钻研、总结相关知识，在课堂上开展类比变题教学并不难。

（二）揭示本质，归纳变题

归纳变题，是指对一道特殊问题的条件、结论以及问题的结构进行归纳总结，得到这道特殊问题的一般题型。简言之，归纳变题是由部分到整体、由特殊到一般的变题方法。归纳推理的思想，也是新课标新增加的知识点，在教学中启发学生归纳变题，不但能使学生所学数学知识得到浓缩和升华，也培养了学生的抽象概括能力。

例2：若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-1,a_{n+1}=2a_n$，则 $a_n=$__________。

变式一、若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-1,a_{n+1}=2a_n+2n+1$，则 $a_n=$____。

变式二、若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-1,a_{n+1}=2a_n+3^n$，则 $a_n=$______。

变式三、若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-1,a_{n+1}=2a_n+3^n+1$，则 $a_n=$____。

实践证明，引导学生对典型例题的解法进行总结、回味与提炼，能使学生“变重解题的数量为重解题的质量和解题后的反思”，教师要力求做到让学生吃透一道题，掌握一类题，悟出一些方法、道理，尽快从题海中解放出来。高三复习不是在同一水平上的重复，需要创造性地将知识、能力和思想方法在更多的新情境、更高的层次中不断地、反复地渗透，才能达到螺旋式的再认识、再升华。

（三）回归教材，着眼高考

我国著名的数学教师宋庆生先生说过“学习数学的只要目的在于解题，掌握数学就意味着善于解题。”教师是解题的探路人，教材是解题的源泉，教师需要立足教材，着眼高考。向量是数学和其他一些学科进行研究的重要而有力的工具，同

时也是连接代数和几何的桥梁之一。通过向量可以把几何问题和代数问题有机结合,通过代数运算得到几何关系,也可以给代数赋予几何直观。高考向量的考点基本来源于教材可以利用向量的几何意义和代数运算解决,也可以建立直角坐标系来解决,解法灵活多样。下面我们从必修四(人教 A 版)的第二章《2.4 平面向量的数量积》教材例题出发,探讨数量积的常见解题方法。

对比向量的线性运算,我们发现,向量线性运算的结果是一个向量,而两个向量的数量积是一个数量,而且这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关。我们教材中讲解数量积,设置三个例题,着眼高考,我们可以从三个不同的角度求解数量积。

教材 P104,例 1:已知 $|a|=5$, $|b|=4$,a 与 b 的夹角 $\theta=120°$,求 $a\cdot b$。

教材 P105,例 3:已知 $|a|=5$, $|b|=4$,a 与 b 夹角 $\theta=60°$,求 $(a+2b)\cdot(a-3b)$。

教材 P107,例 6:已知 $a=(5,-7)$, $b=(-6,-4)$,求 $a\cdot b$。

下面我们立足教材,可以从三个不同的角度来求解平面向量的数量积:定义法、向量分解法、坐标法。

例 3:(2019 全国新课标 I 理)已知向量 ab,满足 $|a|=2|b|$, $(a-b)\perp b$ 则 a 与 b 的夹角为(　　)。

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【分析】试题给出有一定长度关系的两个非零向量,考查了向量的概向量的位置关系与长度、向量的运算和向量运算的几何意义等知识点,考查的内容来源于教材。可以运用定义法求夹角等基本量。

教材 P105,例 3:已知 $|a|=5$, $|b|=4$,a 与 b 的夹角 $\theta=60°$,求 $(a+2b)\cdot(a-3b)$。从例 3 中我们可以运用数量积的运算律结合定义法进行求解,此类题型我们可以理解为当已知平面向量中的基底 e_1,e_2($|e_1|$,$|e_2|$,e_1,e_2 夹角)任何向量 a,b 都可以表示为 $a=\lambda_1e_1+\mu_1e_2$, $b=\lambda_2e_1+\mu_2e_2$。

这样我们就可以得到:

$a.b=(\lambda_1e_1+\mu_1e_2)(\lambda_2e_1+\mu_2e_2)=\lambda_1\lambda_2e_1^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)e_1e_2+\mu_1\mu_2e_2^2$,得到数量积。在平时的教学中求数量积最常见的方法,在高考中也是高频考点,我把这种求解向量数量积的方法称为向量分解法。

例 4:(2018 天津文)在如图的平面图形中,已知 $OM=1$, $ON=2$, $\angle MON=120°$

$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$ 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为(　　　)。

(A)-15　　(B)-9

(C)-6　　(D)0

教材 P107,例 6:已知 $a=(5,-7)$, $b=(-6,-4)$,求 $a\cdot b$。

坐标法运算是最简单的方法,是学生优先考虑的方法,所以在向量运算的过程中需要优先考虑坐标法进行运算,在高考中也是常见的考点,在进行向量数量积运算时,若能用坐标法进行运算,往往能起到事半功倍的效果,所以在教学中我们要求学生优先考虑坐标法。

例 5(2020 年全国新课标 II 理科)已知单位向量 a,b 的夹角为 45°,ka-b 与 a 垂直,则 k=_________。

【分析】试题考查单位向量的概念,平面向量的夹角、平面向量的运算及用数量积刻画两个向量垂直的方法,我们也可以通过坐标法快速、准确的解决问题。

【解析】建立平面直角坐标系,

则 $a=(1,0)b=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $ka-b=(k-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$,

由题意得 $(ka-b)\cdot a=0$ 所以 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

在复习过程中,课堂教学不能仅停留在习题本身,应该重视对已有题型的挖掘、延伸,使学生加深对原题的理解,提高学生解题的灵活性,更应注重激发兴趣和求知欲,注重意识、思想和认识方法的神态以及能力的培养,只有这样的复习才能达到事半功倍的效果。

【参考文献】

[1]教育部.普通高中数学课程标准[M].人民教育出版社,2017

[2]教育部.高考试题分析(理科数学分册)[M].高等教育出版社,2020

(上接第 189 页)

济水平发展,提高人们生活质量等方面发挥出不可替代的作用。为此,相关工作人员要综合考虑环境污染、茶园管理不科学等问题,在茶园栽培技术的应用背景下,通过开展相关实验,加强茶园的病虫防治工作,为进一步提高茶叶质量和产量,促进茶叶行业的健康、可持续发展打下坚实的基础。

【参考文献】

[1]曹雨,崔晓明,罗显扬.修剪施肥相结合对低产低效茶园茶叶品质的影响[J].安徽农业科学,2012,(27)

[2]谭少波.低质茶园改造主要栽培技术试验研究[D].广西:广西大学,2017

[3]王晶.云南不同栽培管理模式下茶树形态特征与茶叶品质比较研究[D].2018,015(018):145-149

[4]巩雪峰,余有本,肖斌,等.不同栽培模式对茶园生态环境及茶叶品质的影响[D].2018(10):138-143

[5]骆锐素,吴玉妹,邹风景,等.油茶高产栽培及低产茶园改造技术[J].农业与技术,2019(03):32-32,59

[6]杨广容,王秀青,李永梅,等.景迈山茶园土壤养分与茶叶品质分析研究[J].云南农业大学学报,2016(3):519-527

(本文系 2019 年度浙江省职业教育与成人教育科研课题《茶园栽培技术实验研究——以低质茶园为例》课题立项号:(19- 台 01)研究成果)