

2022 届高三数学五月调研测试热身训练二

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____



一、单选题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共计 25 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 已知复数 $z = a + (a - 4)i$ ($a \in \mathbf{R}$) (i 为虚数单位), 若 $|z| \leq 2\sqrt{2}$, 则实数 a 的值为 ()

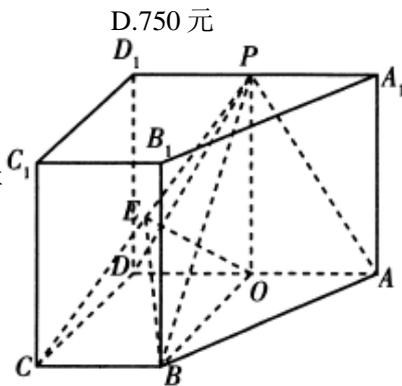
- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

2. 设备的经济寿命是指设备从投入使用开始到因继续使用在经济上不合理而被更新所经历的时间,

由维护费用的提高和使用价值的降低决定的. 设备的经济寿命有如下计算公式: $N_0 = \sqrt{\frac{2(P-L_N)}{\lambda}}$, 其中 N_0 为设备的经济寿命(单位:年), P 为设备目前实际价值, L_N 为设备 N 年末的净残值, λ 为设备的低劣化值. 若有一台设备, 目前实际价值为 8000 元, 预计经济寿命为 7 年, 设备的低劣化值为 300 元, 则该设备 7 年末的净残值为 ()

- A. 600 元 B. 650 元 C. 700 元 D. 750 元

3. 如图, 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD // BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = 2BC = 4$, $CD = 2\sqrt{3}$, P, O, E 分别为 A_1D_1, AD, PC 的中点, $\triangle PAD$ 为正三角形, 则三棱锥 $E - POB$ 的体积为 ()



- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

4. 已知动直线 $l: kx - y - 2k + 2 = 0$ 恒过定点 A , B 为圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$ 上一点, 若 $|OA| = |OB|$ (O 为坐标原点), 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()

- A. $\frac{8}{5}$ B. 3 C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{24}{5}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1, \\ 2 \times 3^{\frac{n}{2}-1}, & n = 2k \end{cases}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\exists m \in \mathbf{N}^*$, 使 $S_{2m} = a_t S_{2m-1}$ ($t \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_t =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 1 或 3 D. 2 或 3

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

6. 已知 $(\frac{2}{x} - \sqrt{x})^6$, 则 ()

- A. 展开式中的第 4 项为 $160x^{-\frac{3}{2}}$ B. 展开式中的常数项为 60
C. 展开式中的各项系数之和为 1 D. 展开式中第 4 项的二项式系数最大

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}) - 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{3}{2} + 4k, \frac{7}{2} + 4k]$ ($k \in \mathbf{Z}$)
B. 不等式 $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ 的解集为 $[4k + \frac{7}{6}, 4k + \frac{11}{6}]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

C. $f(x)$ 的图象与函数 $y = \ln(x + 1)$ 的图象在 y 轴右侧无公共点

D. 设 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个零点, 则 $\sin \frac{(x_1+x_2)\pi}{2} = 0$

8. 已知 P 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的动点, $Q(4, -4)$ 在抛物线 C 上, 过抛物线 C 的焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, $M(3, -2), N(-1, 1)$, 则 ()

A. $|PM| + |PF|$ 的最小值为 4

B. 若线段 AB 的中点为 M , 则 $\triangle NAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$

C. 若 $NA \perp NB$, 则直线 l 的斜率为 2

D. 过点 $E(1, 2)$ 作两条直线与抛物线 C 分别交于点 G, H , 且满足 EF 平分 $\angle GEH$, 则直线 GH 的斜率为定值

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9. 良好的睡眠是保证高中学生良好学习状态的基础, 为了解某校高三学生的睡眠状况, 该校调查了高三年级 1200 名学生的睡眠时间(单位: 小时), 调查发现, 这 1200 名学生每天的睡眠时间 $X \sim N(8, 1)$, 则每天的睡眠时间为 5 ~ 6 小时的学生人数约为 _____. (结果四舍五人保留整数)(附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

10. 请写出一个同时满足条件①②③的函数 $f(x) =$ _____.

① $\forall x \in \mathbf{R}, f(1 - x) = f(1 + x)$; ② 函数 $f(x)$ 的最小值为 1; ③ 函数 $f(x)$ 不是二次函数.

11. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 作双曲线 C 的渐近线

$y = \frac{b}{a}x$ 的垂线, 垂足为 P , 且与双曲线 C 的左支交于点 Q , 若 $OQ \parallel PF_2$ (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为 _____.

12. 若函数 $f(x) = -x$ 与函数 $g(x) = ae^x + 2$ 的图象有两个不同的交点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本大题共 4 小题, 共 46 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知数列 $\{a_n - 2^n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 数列 $\{a_n - 2n + 1\}$ 是公比为 2 的等比数列.

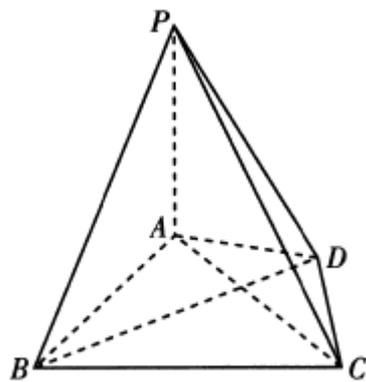
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{1}{(2n+3)(a_{n+1}-2^{n+1})}$, 且 T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $T_n < \frac{1}{6}$.

14. 在① $\tan A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$, ② $\sqrt{3}(c - a \cos B) = b \sin A$, ③ $(c - 2b) \cos A + a \cos C = 0$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____.
- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 D 为 AC 边上一点, $AB \perp BD$, $CD = BD$, $a = 3\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
- 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

15. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD = CD = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

- (1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;
- (2) 若直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° , 平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l , 求二面角 $A - l - C$ 的余弦值.



16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点, 过 F_1 且与 x 轴垂直的直线与椭圆 C 交于点 A, B , 且 $\triangle ABF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于不同于右顶点 P 的 M, N 两点, 且 $PM \perp PN$, 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的最大值.