

江苏省仪征中学 2022 届高三数学抢分计划二

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、选择题:本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid 2^x > 1\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

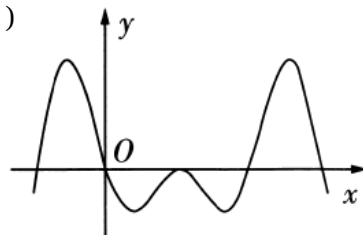
- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-1, 1]$

2. 已知复数 z_1, z_2 满足 $z_1 + z_2 = 1 + 2i$, $z_1 - z_2 = 1$, 则 $z_1 z_2 =$ ()

- A. $-1 + i$ B. $1 - i$ C. i D. $-i$

3. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()

- A. $f(x) = x \sin \pi x$
B. $f(x) = (x - 1) \sin \pi x$
C. $f(x) = x \sin \pi(x + 1)$
D. $f(x) = (x - 1) \cos \pi x$



4. 天文学上用绝对星等衡量天体的发光强度, 用目视星等衡量观测者看到的天体亮度, 可用 $M = m - 5 \lg \frac{d}{d_0}$ 近似表示绝对星等 M 、目视星等 m 和观测距离 d (单位: 光年) 之间的关系. 已知织女星的绝对星等为 0.58 , 目视星等为 0.04 , 大角星的绝对星等为 -0.38 , 目视星等为 -0.06 , 则观测者与织女星和大角星间的距离的比值约为 ()

- A. $10^{-2.2}$ B. $10^{0.172}$ C. $10^{-0.044}$ D. $10^{-0.172}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(1 - x) = f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 则关于 x 的不等式 $f(x + 1) > f(2 - 3x)$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(\frac{1}{4}, 1)$
C. $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, -\frac{1}{4})$

6. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 3, BC = 4, CD$ 是斜边 AB 上的高, $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 绕 AC 旋转一周得到的几何体的表面积分别为 S_1 和 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为 ()

- A. $\frac{21}{125}$ B. $\frac{181}{400}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{7}$

7. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1| + ax + 1$ 有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -e)$ B. $(-\infty, -e]$ C. $(-e, 0)$ D. $(-e, +\infty)$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 P 是 C 上任意一点, 若圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 上存在点 M, N , 使得 $\angle MPN = 120^\circ$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, 1)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.教育统计学中,为了解某考生的成绩在全体考生成绩中的位置,通常将考生的原始分数转化为标准分数.定义标准分数 $z_i = \frac{1}{s}(x_i - \bar{x}) (i = 1, 2, \dots, n)$,其中 x_i 为原始分数, $\bar{x}$ 为原始分数的平均数, s 为原始分数的标准差.已知某校的一次数学考试,全体考生的平均成绩 $\bar{x} = 115$,标准差 $s = 10.8$,转化为标准分数后,记平均成绩为 m ,标准差为 σ ,则()

- A. $m = 115$ B. $m = 0$ C. $\sigma = 10.8$ D. $\sigma = 1$

10. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$,若 $f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -f(\pi - x)$,且 $f(x)$ 的最小正周期大于 $\frac{\pi}{2}$,则()

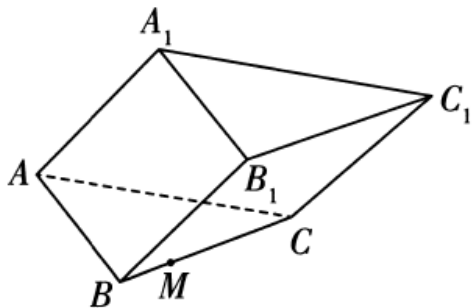
- A. $\omega = 3$ B. $f(x)$ 是偶函数 C. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增
D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = 2\sin 3x$ 的图象

11. 已知 $(3x - m)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022}$,且 $\log_2 a_0 = 2022, a_1 < 0$,则()

- A. $m = 2$ B. $(3x - m)^{2022}$ 的展开式中第 1012 项的系数最大
C. $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{5^{2022} + 1}{2}$ D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2022a_{2022} = 2022$

12. 如图,已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 1 的正三角形, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^\circ$, M 是棱 BC 上一点(与端点不重合),则()

- A. $BC \perp AA_1$
B. 平面 $AA_1M \perp$ 平面 BB_1C_1C
C. 三棱锥 $B_1 - A_1C_1M$ 的体积为定值
D. 当 $AA_1 = 1$ 时, A_1M 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sqrt{2}\cos \alpha - \sin \alpha = 1$,则 $\cos 2\alpha =$ _____.

14. 某学校团委周末安排甲、乙、丙三名志愿者到市图书馆和科技馆服务,每个人只能去一个地方,每个地方都必须有人去,则图书馆恰好只有丙去的概率为_____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, E, F 分别是 AB 和 AC 的中点, P 是 $\triangle ABC$ 边上一动点,则满足 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF}$ 的点 P 的个数为_____.

16. 已知直线 $x = 1$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于点 M ,与 x 轴交于点 N ,点 A, B 都在抛物线 C 上,且直线 AB 的斜率为 2,点 N 到直线 MA, MB 的距离相等,则 p 的值为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{a_5}{a_2} = 3, S_5 = 5S_2 + 10$.

(1) 求 a_n, S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{2n+1}{a_n S_{2n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + (1-n)a_n}, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = \frac{1}{a_n} - n, n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \begin{cases} 0, & n = 2^k, k \in \mathbf{N}^*, \\ \frac{1}{a_n}, & n \neq 2^k, k \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_2-a_1} + \frac{2}{a_3-a_2} + \frac{3}{a_4-a_3} + \cdots + \frac{n}{a_{n+1}-a_n} = 2^{n+1} - 2$.

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1 = 2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $\left\{\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n}\right\}$ 是公差为 k 的等差数列, 则称 $\{a_n\}$ 为 $d(k)$ 数列.

(1) 若 $\{b_n\}$ 为 $d(0)$ 数列, $b_1 = 1, b_2 = 4$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $c_1 = 1, c_2 = 5$, $\{S_n\}$ 为 $d(2)$ 数列, 求证: $S_n \leq nc_n$.

江苏省仪征中学 2022 届高三数学抢分计划二参考答案

1-5 CABDC 6-8 AAC 9. BD 10. AB 11. AC 12. ACD 13. $\frac{7}{9}$ 14. $\frac{1}{6}$ 15.4 16.8

8. 【解析】连接 OP , 当 P 不为椭圆的上、下顶点时, 设直线 PA, PB 分别与圆 O 切于点 A, B , $\angle OPA = \alpha$, 因为存在 M, N 使得 $\angle MPN = 120^\circ$, 所以 $\angle APB \geq 120^\circ$, (关键: 数形结合分析出

$\angle APB \geq 120^\circ$) 即 $\alpha \geq 60^\circ$, 又 $\alpha < 90^\circ$, 所以 $\sin \alpha \geq \sin 60^\circ$, 连接 OA , 则 $\frac{|OA|}{|OP|} = \frac{b}{|OP|} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$|OP| \leq \frac{2b}{\sqrt{3}}$, 又 P 是 C 上任意一点, 则 $|OP|_{\max} \leq \frac{2b}{\sqrt{3}}$, 又 $|OP|_{\max} = a$, 所以 $a \leq \frac{2b}{\sqrt{3}}$, 则由 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $e^2 \leq \frac{1}{4}$, 又 $0 < e < 1$, 所以 $e \in (0, \frac{1}{2}]$, 故选 C.

12. 【解析】对于 A, 取 BC 的中点 N , 连接 AN, A_1N, A_1B, A_1C , 易知 $AN \perp BC, \triangle A_1AB \cong \triangle A_1AC$, 所以 $A_1B = A_1C$, 所以 $A_1N \perp BC$, 又 $AN \cap A_1N = N$, 所以 $BC \perp$ 平面 AA_1N , 所以 $BC \perp AA_1$, 故 A 正确.

对于 B, 由 A 知, 当 M 为 BC 的中点时, $BC \perp$ 平面 AA_1M , 所以平面 $AA_1M \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以当 M 不为 BC 的中点时, 平面 $AA_1M \perp$ 平面 BB_1C_1C 不成立, 故 B 错误.

对于 C, 因为 $BC // B_1C_1$, 所以 $BC //$ 平面 $A_1B_1C_1$,

则点 M 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离为定值, 又 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为定值, 所以 $V_{B_1-A_1C_1M} = V_{M-A_1B_1C_1}$, 为定值, 所以 C 正确.

对于 D, 如图, 取 BC 的中点 N , 连接 AN, A_1B , 过点 A_1 作 $A_1O \perp$ 平面 ABC , 垂足为 O , 易知 O 在 AN 上. 在 $\triangle A_1AB$ 中, 作 $A_1D \perp AB$, 垂足为 D , 连接 OD , 因为 $AA_1 = 1, \angle A_1AD = 60^\circ$, 所以 $AD = \frac{1}{2}$, 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, $\angle OAD = 30^\circ$, 所以 $OA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $OA_1 = \sqrt{AA_1^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, ON = AN - OA = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 设 $MN = x$, 则 $0 \leq x < \frac{1}{2}$, 连接 OM , 则 $A_1M = \sqrt{OA_1^2 + OM^2} = \sqrt{OA_1^2 + ON^2 + MN^2} =$

$\sqrt{\frac{3}{4} + x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $x = 0$, 即 M 为 BC 的中点时等号成立, 所以 A_1M 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确.

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $\frac{a_5}{a_2} = 3$, 得 $\frac{a_1+4d}{a_1+d} = 3$, 所以 $d = 2a_1$. (1)(1 分)

由 $S_5 = 5S_2 + 10$, 得 $5a_1 + 10d = 5(2a_1 + d) + 10$, 整理得 $d = a_1 + 2$. (2)

由 (1)(2) 得 $a_1 = 2, d = 4$, (3 分)

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$, (4 分)

$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = 2n + \frac{n(n-1) \times 4}{2} = 2n^2$. (5 分)

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{2n+1}{a_n S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{(4n-2) \cdot 2(2n+1)^2} = \frac{1}{4(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

所以 $T_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{8n+4}$. (10 分)

18. (1) 因为 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + (1-n)a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + (1-n)$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - (n+1) = 2 \left(\frac{1}{a_n} - n \right)$, 因为 $b_n = \frac{1}{a_n} - n$, 所以 $b_{n+1} = 2b_n$,

因为 $a_1 = 1$, 所以 $b_1 = \frac{1}{a_1} - 1 = 0$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 0$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{1}{a_n} - n = 0$, 所以 $a_n = \frac{1}{n}$, 所以 $c_n = \begin{cases} 0, & n = 2^k, k \in \mathbf{N}^*, \\ n, & n \neq 2^k, k \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$

所以数列 $\{c_n\}$ 前 100 项和 $S_{100} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) - (2 + 4 + 8 + \cdots + 64)$
 $= 5050 - 126 = 4924$

19. (1) $b_n = \frac{n}{2^n}$; (2) $a_n = 4 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$.

20. (1) 【解】 因为 $\{b_n\}$ 为 $d(0)$ 数列, $\frac{b_2}{2} - \frac{b_1}{1} = 1$,

所以 $\left\{\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 0 的等差数列,

所以 $\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1$. 又 $\frac{b_1}{1} = 1$,

所以 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

所以 $\frac{b_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 得 $b_n = n^2$.

(2) 【证明】 $S_1 = c_1 = 1, S_2 = c_1 + c_2 = 6$, 所以 $\frac{S_2}{2} - \frac{S_1}{1} = 2$,

依题意 $\left\{\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 2, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$.

因为 $\frac{S_2}{2} - \frac{S_1}{1} = 2, \frac{S_3}{3} - \frac{S_2}{2} = 4, \frac{S_4}{4} - \frac{S_3}{3} = 6, \dots, \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = 2(n-1)$,

以上 $(n-1)$ 个等式累加, 得 $\frac{S_n}{n} - \frac{S_1}{1} = 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = n(n-1), n \geq 2$, 所以 $S_n = n^2(n-1) + n = n^3 - n^2 + n, n \geq 2$.

因为 $S_1 = 1$ 满足上式, 所以 $S_n = n^3 - n^2 + n$.

当 $n \geq 2$ 时, $c_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - n^2 + n - (n-1)^3 + (n-1)^2 -$

$(n-1) = 3n^2 - 5n + 3$,

且 $c_1 = 1$ 满足上式, 所以 $c_n = 3n^2 - 5n + 3$.

因为 $nc_n - S_n = 3n^3 - 5n^2 + 3n - n^3 + n^2 - n = 2n^3 - 4n^2 + 2n = 2n(n-1)^2 \geq 0$, 所以 $S_n \leq nc_n$.