

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分。

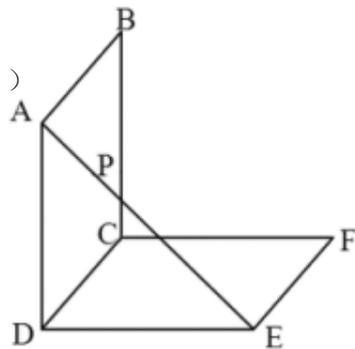
9. 下列命题中正确的有 ()

- A. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$ ；
 B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$ ；
 C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z_1 = \overline{z_2}$ ；
 D. 若复数 $z \in \mathbf{R}$ ，则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$ 。

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项为1，公差为2，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，首项为1，公比为2，设 $c_n = a_{b_n}$ ， T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，则当 $T_n < 2019$ 时， n 的取值可以是下面选项中的 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

11. 如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $DEFC$ 边长均为1，平面 $ABCD$ 与平面 $DEFC$ 互相垂直， P 是 AE 上的一个动点，则 ()



- A. CP 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 B. 当 P 在直线 AE 上运动时，三棱锥 $D - BPF$ 的体积不变
 C. $PD + PF$ 的最小值为 $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 D. 三棱锥 $A - DCE$ 的外接球表面积为 3π

12. 已知圆 $M : x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$ ，点 $P(a, b)$ 是圆 M 上的动点，则 ()

- A. 圆 M 关于直线 $x + 3y + 2 = 0$ 对称 B. 直线 $x + y = 0$ 与圆 M 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$
 C. $\frac{b}{a-3}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ D. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x < 1 \end{cases}$ 满足对任意的实数 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是_____。

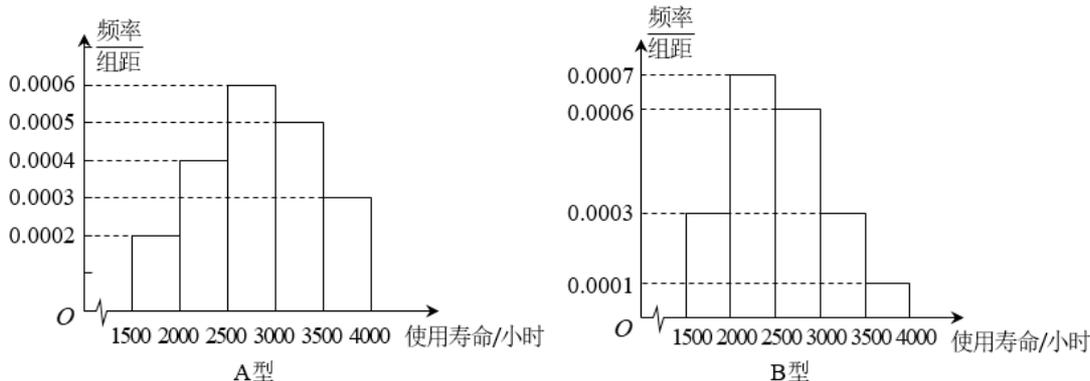
14. 平面内不共线的三点 O, A, B ，满足 $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 2$ ，点 C 为线段 AB 的中点， $\angle AOB$ 的平分线交线段 AB 于 D ，若 $|\overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $|\overrightarrow{OD}| =$ _____。

15. 已知圆 $C : x^2 + y^2 = 4$ ，设圆 C 上的点 P 在 x 轴的上方，点 A 的坐标为 $(4, 0)$ ，直线 AP 与圆 C 的另一交点为 Q ，且 Q 为 AP 的中点，则直线 AP 的斜率为_____。

16. 复印纸幅面规格采用 A 系列，其幅面规格为：① $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$ 所有规格的纸张的幅宽（以 x 表示）和长度（以 y 表示）的比例关系都为 $x : y = 1 : \sqrt{2}$ ；② 将 A_1 纸张沿长度方向对开成两等分，便成为 A_2 规格； A_2 纸张沿长度方向对开成两等分，便成为 A_3 规格； \dots ；如此对开至 A_9 规格，现有 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$ 纸各一张，若 A_5 纸的幅宽为 2dm ，则 A_1 纸的面积为_____ dm^2 ，这 9 张纸的面积之和等于_____ dm^2 。

四、解答题：本题共 6 小题，第 17 题 10 分，其余每小题 12 分，共 70 分.

17. 为落实十三五规划节能减排的国家政策，某职能部门对市场上两种设备的使用寿命进行调查统计，随机抽取 A 型和 B 型设备各 100 台，得到如下频率分布直方图：



- 估算 A 型设备的使用寿命的第 80 百分位数.
- 将使用寿命超过 2500 小时和不超过 2500 小时的台数填入下面的列联表：

	超过 2500 小时	不超过 2500 小时	总计
A 型			
B 型			
总计			

根据上面的列联表，能否有 99% 的把握认为使用寿命是否超过 2500 小时与型号有关？

(3) 已知用频率估计概率，现有一项工作需要 10 台同型号设备同时工作 2500 小时才能完成，工作期间设备损坏立即更换同型号设备（更换设备时间忽略不计），A 型和 B 型设备每台的价格分别为 1 万元和 0.6 万元，A 型和 B 型设备每台每小时耗电分别为 2 度和 6 度，电价为 0.75 / 元/度. 只考虑设备的成本和电费，你认为应选择哪种型号的设备，请说明理由. 参考公式：

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}, \quad n = a + b + c + d.$$

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

18. 某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A, B 两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分； B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分，已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

- (1) 若小明先回答 A 类问题，记 x 为小明的累计得分，求 x 的分布列；
- (2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

江苏省仪征中学 2022 届高三数学抢分计划三参考答案

一、单项选择题：1. B 2. D 3. D 4. C 5. A 6. D 7. C 8. C

8. 解：设点 P 的坐标为 $(x_0, \ln x_0)$ ， $y' = \frac{1}{x}$ ，当 $x = x_0$ 时， $y'_{x_0} = \frac{1}{x_0}$

\therefore 切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ，令 $y = 0$ ，得 $x = x_0 - x_0 \ln x_0$ ， \therefore 点 P 的坐标为

$(x_0 - x_0 \ln x_0, 0)$ ， $\because 0 < x < 1$ ， $\therefore \ln x_0 < 0$ ，

$\therefore S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \times |\ln x_0| \times (x_0 - x_0 \ln x_0) = -\frac{1}{2} \ln x_0 (x_0 - x_0 \ln x_0) = -\frac{1}{2} x_0 \ln x_0 + \frac{1}{2} x_0 (\ln x_0)^2$

令 $g(x) = -\frac{1}{2} x_0 \ln x_0 + \frac{1}{2} x_0 (\ln x_0)^2$ ，

$g'(x) = -\frac{1}{2} x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - \frac{1}{2} \ln x_0 + \frac{1}{2} (\ln x_0)^2 + \frac{1}{2} x_0 \cdot 2 \ln x_0 \cdot 2 \ln x_0 = \frac{1}{2} (\ln x_0)^2 + \frac{1}{2} \ln x_0 - \frac{1}{2}$

令 $t = \ln x_0$ ，($t < 0$)， $f(t) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} = 0$ ，解得 $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ (舍去)， $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$\therefore f(t)$ 在 $\left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$ 上单调递减

\therefore 当 $\ln x_0 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 时， $g(x)$ 最大，即 $\triangle AOP$ 面积最大，故点 P 的纵坐标为 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 。

二、多项选择题：9. AD 10. AB 11. BD 12. AC

三、填空题：13. [4, 8) 14. $\frac{2}{3}$ 15. $-\frac{\sqrt{15}}{9}$ 16. ①. $64\sqrt{2}$ ②. $\frac{511\sqrt{2}}{4}$

16. 【详解】由题意，若 A_1 长宽 $(\sqrt{2}a, a)$ ， A_2 长宽 $(a, \frac{\sqrt{2}a}{2})$ ， A_3 长宽 $(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{a}{2})$ ，...

$\therefore (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 a = 2$ ，可得 $a = 8$ ，则 A_1 长宽 $(8\sqrt{2}, 8)$ ，故其面积为 $64\sqrt{2} \text{ dm}^2$ 。

由上知：9 张纸的面积是首项为 $64\sqrt{2}$ ，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

\therefore 9 张纸的面积之和等于 $\frac{64\sqrt{2}(1 - \frac{1}{2^9})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{511\sqrt{2}}{4} \text{ dm}^2$ 。

四. 解答题：

17. (1) 前三组的频率之和为： $(0.0002 + 0.0004 + 0.0006) \times 500 = 0.60$ ，

前四组的频率之和为： $(0.0002 + 0.0004 + 0.0006 + 0.0005) \times 500 = 0.85$ ，

所以第 80 百分位数一定位于 $[3000, 3500)$ ，

所以第 80 百分位数为： $3000 + \frac{0.80 - 0.60}{0.85 - 0.60} \times 500 = 3400$ 小时；

(2) 由频率分布直方图可知，

A 型超过 2500 小时的有 $100 \times (0.0006 + 0.0005 + 0.0003) \times 500 = 70$ 台，

则A型不超过2500小时的有 $100 - 70 = 30$ 台，

B型超过2500小时的有 $100 \times (0.0006 + 0.0003 + 0.0001) \times 500 = 50$ 台，

则B型不超过2500小时的有 $100 - 50 = 50$ 台.

列联表如下：

	超过2500小时	不超过2500小时	总计
A型	70	30	100
B型	50	50	100
总计	120	80	200

提出 H_0 ：使用寿命是否超过2500小时与型号没有关系.

$$\text{因为 } K^2 = \frac{200 \times (70 \times 50 - 30 \times 50)^2}{100 \times 100 \times 120 \times 80} \approx 8.333 > 6.635,$$

所以有99%的把握认为使用寿命是否超过2500小时与型号有关.

(3) 由频率分布直方图中的频率估计概率知：

A型设备每台更换的概率为 $\frac{30}{100} = 0.3$ ，所以10台A型设备估计要更换3台；

B型设备每台更换的概率为 $\frac{50}{100} = 0.5$ ，所以10台B型设备估计要更换5台，

选择A型设备的总费用 $y_1 = (10 + 3) \times 1 + 10 \times 2 \times 0.75 \times 2500 \times 10^{-4} = 16.75$ （万元），

选择B型设备的总费用 $y_2 = (10 + 5) \times 0.6 + 10 \times 6 \times 0.75 \times 2500 \times 10^{-4} = 20.25$ （万元），

所以选择A型设备.

18. 【详解】(1) 由题可知， X 的所有可能取值为0，20，100.

$$P(X = 0) = 1 - 0.8 = 0.2; \quad P(X = 20) = 0.8(1 - 0.6) = 0.32;$$

$$P(X = 100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4.$$

若小明先回答B问题，记 Y 为小明的累计得分，则 Y 的所有可能取值为0，80，100.

$$P(Y = 0) = 1 - 0.6 = 0.4;$$

$$P(Y = 80) = 0.6(1 - 0.8) = 0.12;$$

$$P(Y = 100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6.$$

因为 $54.4 < 57.6$ ，所以小明应选择先回答B类问题.