

数学多选题的基本类型及破解策略

林菊芳

(湖北省黄冈市团风中学 438800)

摘要:新高考中数学多项选择题的创新引入与设置,给试卷带来了创新的亮点,突出了数学核心概念,强化了基础知识和基本技能的有效落实.结合2021年高考真题实例,剖析多选题的基本类型及其对应的破解策略,引领并指导数学教学与复习备考.

关键词:多选题;类型;策略;概念;运算

中图分类号:G632

文献标识码:A

文章编号:1008-0333(2021)31-0069-02

数学多项选择题是选择题的一种,它具有备选答案不唯一,存在多个正确选项的特点.试题可以从多角度审视某一核心数学概念的全貌,考查更多的数学基本知识或能力点,对学生有较好的区分度.解答此类型数学多项选择题可以用直接法、特值法、反证法、数形结合法等逐项判断.

一、数学多选题的基本类型

数学多项选择题根据各选择支干扰因素的区分,对应的选项设计大致分为以下六种基本类型,即:

(1)条件疏漏:将一些数学问题中容易疏漏的条件所产生的结果设计为选择支干扰项;

(2)实际背景忽视:细心模拟学生的演算过失和差错,得到迷惑性较强的选择支干扰项,对提高试题的针对性和鉴别力十分有效;

(3)概念混淆:针对学生容易混淆的数学相关概念、性质等设计选择支干扰项;

(4)题意误解:读题不慎,审题不细,误解题意,由此引发的错误结论设计为选择支干扰项;

(5)推理错乱:由不合逻辑的推理而造成的错误结果设计为选择支干扰项;

(6)思维定势:熟悉的内容,相似的形式,常会令人产生类比与联想,可能产生负迁移,由此导致的错误设计为选择支干扰项等.

二、数学多选题的破解策略

1. 概念辨析类多选题

例1 (2021年高考数学新高考I卷第9题)(多选

题)有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 由这组数据得到新样本数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 其中 $y_i = x_i + c (i = 1, 2, \dots, n)$, c 为非零常数, 则().

- A. 两组样本数据的样本平均数相同
- B. 两组样本数据的样本中位数相同
- C. 两组样本数据的样本标准差相同
- D. 两组样本数据的样本极差相同

分析 利用统计知识中的基本知识、基本公式等,将统计中的概念、公式等基本知识交汇与融合在一起,通过平均数、中位数、标准差、极差的定义直接判断即可.

解析 对于选项 A, 两组数据的平均数的差为 c , 故选项 A 错误; 对于选项 B, 两组样本数据的样本中位数的差是 c , 故选项 B 错误; 对于选项 C, 由于标准差 $D(y_i) = D(x_i + c) = D(x_i)$, 则知两组样本数据的样本标准差相同, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 由于 $y_i = x_i + c (i = 1, 2, \dots, n)$, c 为非零常数, x 的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$, y 的极差为 $(x_{\max} + c) - (x_{\min} + c) = x_{\max} - x_{\min}$, 所以两组样本数据的样本极差相同, 故选项 D 正确. 故选 CD.

2. 运算、推理类多选题

例2 (2021年高考数学新高考I卷第11题)(多选题)已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则().

- A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10
- B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
- C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB| = 3\sqrt{2}$
- D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 3\sqrt{2}$

分析 求出过 AB 的直线方程, 再求出圆心到直线 AB 的距离, 得到圆上的点 P 到直线 AB 的距离范围, 判断

收稿日期: 2021-08-05

作者简介: 林菊芳(1981.9-), 女, 湖北省黄冈人, 本科, 中学一级教师, 从事中学数学教学研究.

万方数据

选项 A 与 B;画出图形,由图可知,当过点 B 的直线与圆相切时,满足 $\angle PBA$ 最小或最大,求出圆心与点 B 间的距离,再由勾股定理求得 $|PB|$ 判断选项 C 与 D.

解析 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x + 2y - 4 = 0$. 而圆心为 $C(5, 5)$, 半径 $r = 4$, 则点 P 到直线 AB 的最大距离为 $\frac{|5 + 2 \times 5 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} + r = \frac{11}{\sqrt{5}} + 4 < 10$, 最小距离为 $\frac{11}{\sqrt{5}} - 4 < 2$, 则选项 A 正确, 选项 B 错误;对于选项 C, 当 $\angle PBA$ 最小时, PB 与圆 C 相切, 此时 $|BC| = \sqrt{34}$, 可得 $|PB| = \sqrt{34 - 16} = 3\sqrt{2}$, 则选项 C 正确;而当 $\angle PBA$ 最大时, PB 与圆 C 也相切, 同样可得 $|PB| = 3\sqrt{2}$, 则选项 D 正确. 故选 ACD.

3. 位置确定类多选题

例 3 (2021 年高考数学新高考 II 卷第 10 题)(多选题)
如图 1, 在正方体中, O 为底面的中点, P 为所在棱的中点, M, N 为正方体的顶点, 则满足 $MN \perp OP$ 的是().

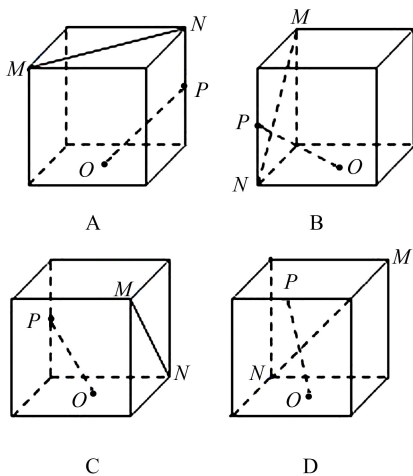


图 1

分析 对于选项 A, 设正方体棱长为 2, 设 MN 与 OP 所成角为 θ , 求出 $\tan\theta$ 的值, 从而不满足 $MN \perp OP$; 对于选项 B, C, D, 作出平面直角坐标系, 设正方体棱长为 2, 利用向量法进行判断.

解析 对于选项 A, 设正方体棱长为 2, MN 与 OP 所成角为 θ , 则 $\tan\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则知不满足 $MN \perp OP$,

故选项 A 错误;对于选项 B, 如图 2(1), 作出平面直角坐标系, 设正方体棱长为 2, 则 $N(2, 0, 0)$, $M(0, 0, 2)$, $P(2, 0, 1)$, $O(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MN} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{OP} = (1, -1, 1)$, 而 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, 则满足 $MN \perp OP$, 故选项 B 正确;对于选项 C, 如图 2(2), 作出平面直角坐标系, 设正方体棱长为 2, 则 $M(2, 2, 2)$, $N(0, 2, 0)$, $O(1, 1, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $\overrightarrow{MN} = (-2, 0, -2)$, $\overrightarrow{OP} = (-1, -1, 1)$, 而 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, 则满足

$MN \perp OP$, 故选项 C 正确;对于选项 D, 如图 2(3), 作出平面直角坐标系, 设正方体棱长为 2, 则 $M(0, 2, 2)$, $N(0, 0, 0)$, $P(2, 1, 2)$, $O(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MN} = (0, -2, -2)$, $\overrightarrow{OP} = (1, 0, 2)$, 而 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = -4$, 则不满足 $MN \perp OP$, 故选项 D 错误. 故选 BC.

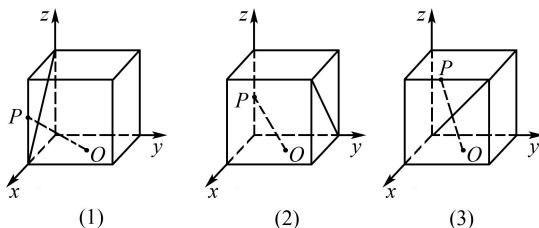


图 2

4. 信息创新类多选题

例 4 (2021 年高考数学新高考 II 卷第 12 题) 设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$, 则().

- A. $\omega(2n) = \omega(n)$ B. $\omega(2n+3) = \omega(n) + 1$
C. $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$ D. $\omega(2^n - 1) = n$

分析 根据创新定义, $2n = a_0 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^2 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^k + a_k \cdot 2^{k+1}$ 可判断选项 A; 取 $n = 2$ 可判断选项 B; 把 $8n+5$ 和 $4n+3$ 都化成 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 可判断选项 C; $2^n - 1 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + 1 \cdot 2^{n-1}$ 可判断选项 D.

解析 由于 $2n = a_0 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^2 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^k + a_k \cdot 2^{k+1}$, 则有 $\omega(2n) = \omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + k$, 故选项 A 正确; 当 $n = 2$ 时, $2n + 3 = 7 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$, 可得 $\omega(7) = 3$, 又 $\omega(2) = 0 + 1 = 1$, 所以 $\omega(7) \neq \omega(2) + 1$, 故选项 B 错误; $w(8n+5) = w(8n+4+1) = w(8n+4) = 1$, $w(4n+3) = w(4n+2+1) = w(4n+2) + 1$, 由 A 选项知, $w(2n) = w(n)$, 所以 $w(8n+4) = w(4n+2)$, 即 $w(8n+5) = w(4n+3)$, 故选项 C 正确; 由于 $2^n - 1 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + 1 \cdot 2^{n-1}$, 可得 $\omega(2^n - 1) = n$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

新高考中数学多项选择题的创新引入与设置, 给数学知识的设置与考查提供更多的场所, 给不同层次的学生增加了得分机会, 也更精准地测试和区分了不同层次学生的数学基础和数学能力水平. 同样, 数学多项选择题不同基本类型与相应的破解策略不断涌现, 特别是基本类型与破解策略之间经常也是交叉与融合的, 没有太过明显的类别, 实际破解时要合理综合, 巧妙应用.

参考文献:

- [1] 丁勇. 多选题类型的研究[J]. 中学教研(数学), 2021(02): 15-19.

[责任编辑:李璟]