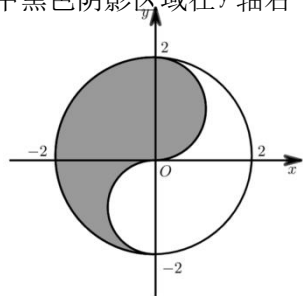


江苏省仪征中学 2022 届高三数学考前抢分计划一

姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____ 评价: _____

一、单选题

- 设 $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$, 则 $|z+1| =$ ()
A. $2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
- 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x | x^2 - 6x + 5 \geq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} B) \cap A =$ ()
A. $\{1, 3, 5\}$ B. $\{3, 5\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{3\}$
- 已知直线 l_1 的方程为: $x + ay - 2 = 0$, 直线 l_2 的方程为: $2x - y + 1 = 0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为 ()
A. $(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ B. $(0, 1)$ C. $(2, 5)$ D. $(\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$
- 设 m, n 表示不同直线, α, β 表示不同平面, 则下列结论中正确的是 ()
A. $m \parallel \alpha, m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$
B. m, n 是两条异面直线, 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \alpha, n \parallel \beta$. 则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel \beta, n \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$
D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \parallel \alpha, n \parallel m$, 则 $n \parallel \beta$
- 函数 $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的极大值点为 ()
A. $-\frac{2\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
- 若 $\tan \theta = 2$, 则 $\frac{\sin \theta (1 - \sin 2\theta)}{\sin \theta - \cos \theta} =$ ()
A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $-\frac{6}{5}$
- 众所周知的“太极图”, 其形状如对称的阴阳两鱼互抱在一起, 也被称为“阴阳鱼太极图”. 如图是放在平面直角坐标系中的“太极图”. 整个图形是一个圆形 $x^2 + y^2 = 4$. 其中黑色阴影区域在 y 轴右侧部分的边界为一个半圆, 给出以下命题:
①当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, 直线 $y = ax + 2a$ 与白色部分有公共点;
②黑色阴影部分 (包括黑白交界处) 中一点 (x, y) , 则 $x + y$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$;
③若点 $P(0, 1)$, MN 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 过点 P 的直径, 线段 AB 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 所有过点 P 的弦中最短的弦, 则 $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为 12.
其中所有正确结论的序号是 ()
A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③
- 已知 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) 是函数 $f(x) = x(e^x + 1) + m(e^x - 1)$ ($m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$) 的 3 个零点, 则 $e^{x_1} - 2x_2 + x_3$ 的取值范围是 ()
A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$



二、多选题

- 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$), 则下列关系式恒成立的有 ()
A. $x^3 > y^3$ B. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ C. $\ln(x - y + 1) > 0$ D. $\sin x > \sin y$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 < 0$, $S_6 = S_{13}$, 则 ()

- A. $a_{10} = 0$ B. $a_{n+1} < a_n$
C. 当 $S_n > 0$ 时, n 的最小值为 20 D. $S_2 < S_{16}$

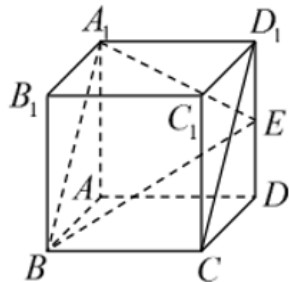
11. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度,

得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于 $g(x)$ 描述正确的是 ()

- A. 最大值为 $\sqrt{3}$, 图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称 B. 图象关于 y 轴对称
C. 最小正周期为 π D. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 成中心对称

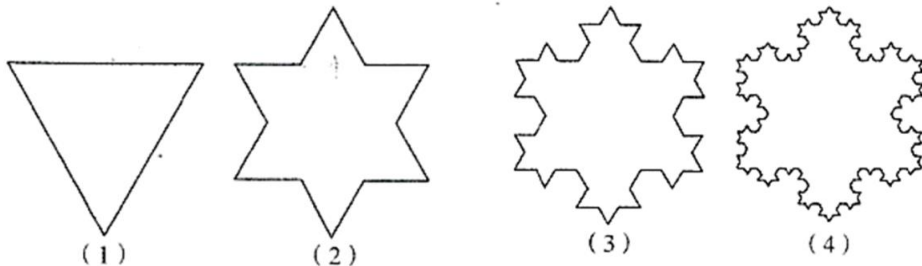
12. 如图的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为 2, 点 E 是棱 DD_1 的中点, 点 F 在正方体表面上运动. 以下命题不正确的有 ()

- A. 侧面 CDD_1C_1 上不存在点 F , 使得 $B_1F \perp CD_1$
B. 点 D 到面 A_1BE 的距离与点 C_1 到面 A_1BE 的距离之比为 $\frac{1}{3}$
C. 若点 F 满足 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE , 则动点 F 的轨迹长度为 $2\sqrt{5}$
D. 若点 F 到点 A 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$, 则动点 F 的轨迹长度为 $2\sqrt{3}\pi$



三、双空题

13. 将正三角形 (1) 的每条边三等分, 并以中间的那一条线段为底边向外作正三角形, 然后去掉底边, 得到图 (2); 将图 (2) 的每条边三等分, 并以中间的那一条线段为底边向外作正三角形, 然后去掉底边, 得到图 (3); 如此类推, 将图 (n) 的每条边三等分, 并以中间的那一条线段为底边向外作三角形, 然后去掉底边, 得到图 ($n+1$). 上述作图过程不断的进行下去, 得到的曲线就是美丽的雪花曲线. 若图 (1) 中正三角形的边长为 1, 则图 (n) 的周长为 _____, 图 (n) 的面积为 _____.



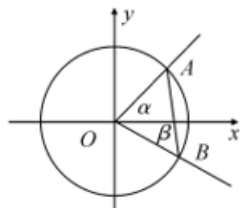
四、填空题

14. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2, b = (1, 2\sqrt{2}), |a+b| = \sqrt{19}$, 则 a, b 的夹角为 _____.

15. 如图所示的直角坐标系中, 角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)、角 β ($-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$) 的终边分别交单位圆于 A, B 两

点, 若 B 点的纵坐标为 $-\frac{5}{13}$, 且满足 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{4}$,

则 $\sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的值为 _____.



16. 已知函数 $f(x) = -x^3 - x + \sin x$, 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 恒有 $f(\cos^2 \theta - 2m) + f(2m \sin \theta - 2) > 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

五、解答题

17. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\omega x}{2} \right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 π .

(1) 求 $f(x)$ 的对称中心和单调递增区间;

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 再将所得图象所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐

标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求若 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$, $|g(x)-m| < 2$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b \cos C = a - \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $\sqrt{3}a\sin C + a\cos C = b + c$.

(1)求内角 A 的大小;

(2)若 $c = 3, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, CD = \frac{\sqrt{19}}{2}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. 在① $b\sin A + \sqrt{3}a\cos B = \sqrt{3}c$,②函数 $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ 的最小值为 $f(A)$,
③ $\cos B(\tan A + \tan B) = 2\sin C$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并解答.

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , _____.

(1)求 A ;

(2)若 $AB = 3AC$,且 $\angle BAC$ 的平分线上的点 D 满足 $BD = CD$,求 $\angle BDC$.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

江苏省仪征中学 2022 届高三数学考前抢分计划—参考答案

1. C 2. D 3. B 4. B 5. D 6. A 7. C 8. A

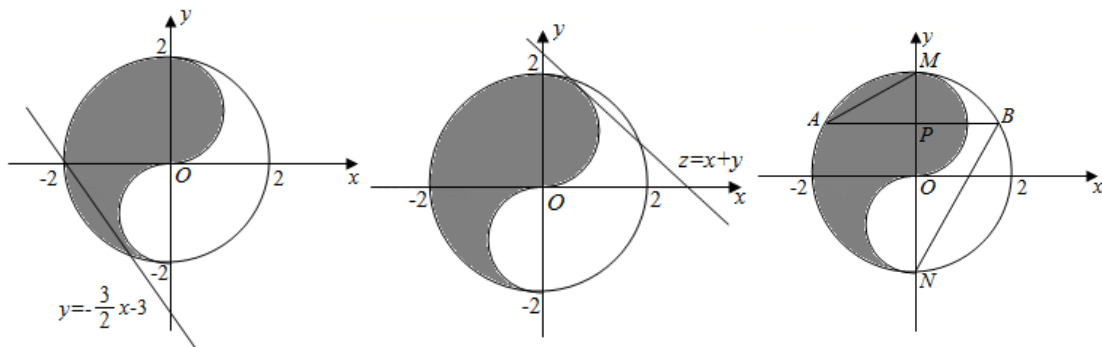
7. 对于①: 当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, 直线的方程为 $y = -\frac{3}{2}x - 3$, 即 $3x + 2y + 6 = 0$,

圆心 $(0,0)$ 到直线 $3x + 2y + 6 = 0$ 的距离为 $\frac{6}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13} < 2$,

下方白色小圆的方程为 $x^2 + (y+1)^2 = 1$, 圆心为 $(0,-1)$, 半径为 1,

圆心 $(0,-1)$ 到直线 $3x + 2y + 6 = 0$ 的距离为 $d = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{13} > 1$,

如图所示,



由图可知, 直线 $y = -\frac{3}{2}x - 3$ 与白色部分无公共点, 故①错误;

对于②, 黑色阴影部分小圆的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$,

设 $z = x + y$, 如图所示: 当直线 $z = x + y$ 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切时, z 取得最大值, 且圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(0,1)$, 半径为 1,

可得 $\frac{|1-z|}{\sqrt{2}} = 1$, 解得 $z = 1 \pm \sqrt{2}$,

由图可知, $z > 0$, 故 z 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$, 故②正确;

对于③, 由于 MN 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 中过点 $P(0,1)$ 的直径,

则 M 、 N 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与 y 轴的两个交点, 可设 $M(0,2)$ 、 $N(0,-2)$,

如图所示, 当 $AB \perp y$ 轴时, $|AB|$ 取最小值, 则直线 AB 的方程为 $y = 1$,

可设点 $A(-\sqrt{3}, 1)$, $B(\sqrt{3}, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AM} = (\sqrt{3}, 1)$, $\overrightarrow{BN} = (-\sqrt{3}, -3)$,

$\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BN} = (2\sqrt{3}, 4)$, 所以 $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = 12$, 故③正确;

故选: C.

8. 解: 显然 $f(0) = 0$, 即 $x_2 = 0$,

设 $f(x_0) = 0$, 则 $f(-x_0) = -x_0(e^{-x_0} + 1) + m(e^{-x_0} - 1) = e^{-x_0}[-x_0(1 + e^{x_0}) + m(1 - e^{x_0})] = -e^{-x_0}f(x_0) = 0$

所以 $x_3 = -x_1 > 0$, 所以 $g(x_3) = e^{x_1} - 2x_2 + x_3 = e^{-x_3} + x_3, x_3 > 0$,

因为 $g'(x_3) = -e^{-x_3} + 1 > 0$ 恒成立, 所以 $y = g(x_3)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x_3) > g(0) = 1$,

故选: A.

9. AC 10. AC 11. BC 12. ACD 13. $3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

13. 解: 第一个三角形的周长为 $3 \times 1 = 3$, 观察发现:

第二个图形在第一个图形的周长的基础上多了实验室的周长的 $\frac{1}{3}$, 第三个在第二个的基础上多了其

周长的 $\frac{1}{3}$, 所以第二个图形的周长为 $3 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{3}$,

第三个图形的周长为 $3 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$,

第四个图形的周长为 $3 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3$,,

所以第 n 个图形的周长是第一个周长的 $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ 倍, 所以第 n 个图形的周长为 $3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,

由题意可知, 第 n 个图形的边长都相等, 且长度变为原来的 $\frac{1}{3}$, 则边长 b_n 的递推公式为

$$b_n = \frac{1}{3} b_{n-1}, n \geq 2, b_1 = 1, \text{ 所以 } b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

边数 a_n 的递推公式为 $a_n = 4 a_{n-1}, n \geq 2, a_1 = 3$, 则 $a_n = 3 \times 4^{n-1}$,

$$\text{第一个图形的面积为 } A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$A_n = A_{n-1} + a_{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} b_n^2\right) = A_{n-1} + 3 \times 4^{n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]^2 = A_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \cdots + (A_n - A_{n-1})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{\frac{4}{9}[1 - (\frac{4}{9})^{n-1}]}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$14. \frac{\pi}{3} \quad 15. \frac{12}{13} \quad 16. \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

16. 解: $f(x) = -x^3 - x + \sin x$ 定义域为 R , 且 $f(-x) = -(-x)^3 - (-x) + \sin(-x) = x^3 + x - \sin x = -f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数, 且

$f'(x) = -3x^2 - 1 + \cos x = -3x^2 - (1 - \cos x) \leq 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 单调递减, 因为

$f(\cos^2 \theta - 2m) + f(2m \sin \theta - 2) > 0$, 故 $f(\cos^2 \theta - 2m) > -f(2m \sin \theta - 2) = f(2 - 2m \sin \theta)$, 根据

函数 $f(x)$ 单调递减, 可得: $\cos^2 \theta - 2m < 2 - 2m \sin \theta$, 整理得: $2m > \frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta - 1}$, 所以题干条件等价

于 $2m > \frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta - 1}$ 在 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立, 令 $t = \sin \theta$, 则 $t \in (0, 1)$, 设 $g(t) = \frac{1 + t^2}{t - 1}$, $t \in (0, 1)$, 则

$$g'(t) = \frac{t^2 - 2t - 1}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2 - 1}{(t-1)^2}, \text{ 因为 } t \in (0, 1), \text{ 所以 } (t-1)^2 \in (0, 1), \text{ 故 } g'(t) = \frac{(t-1)^2 - 1}{(t-1)^2} < 0, \text{ 所以}$$

$g(t) = \frac{1 + t^2}{t - 1}$ 在 $t \in (0, 1)$ 上单调递减, 所以 $g(t) < g(0) = -1$, 所以 $2m \geq -1$, 解得: $m \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{故答案为: } \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$17. (1) f(x) = 2 \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\omega x}{2}\right) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$$

因为最小正周期为 π , 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$,

解得: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$, 所以对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$,

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 解得: $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以单调递增区间为: $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 再将所得图象所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,

纵坐标不变, 得到 $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 时, $0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 \leq g(x) \leq 2$,

若 $|g(x) - m| < 2$ 恒成立, 则 $m - 2 < g(x) < m + 2$, 所以 $\begin{cases} m - 2 < 0 \\ m + 2 > 2 \end{cases}$, 解得: $0 < m < 2$.

18. 解:(1)由 $b\cos C = a - \frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$ 及正弦定理, 得 $\sin B\cos C = \sin A - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$ (1 分)

又 $A = \pi - (B + C)$, $\therefore \sin B\cos C = \sin(B + C) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$,

$\therefore \sin C\cos B - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B = 0$.

$\because 0 < C \leq \pi, \therefore \sin C \neq 0$, (这一步不能省略)

$\therefore \tan B = \sqrt{3}$. 又 $0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}$. (5 分)

(2)解法一由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a + c)^2 - 3ac = 4$, (7 分)

$\therefore (a + c)^2 - 4 = 3ac \leq 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$, 得 $a + c \leq 4$, 当且仅当 $a = c$ 时取等号. (9 分)

又 $a + c > b = 2$, (三角形任意两边之和大于第三边) (10 分)

$\therefore 4 < a + c + b \leq 6$,

$\therefore \triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(4, 6]$. (12 分)

解法二由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A, c = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$, (7 分)

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $L = a + b + c = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A + 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A) + 2 = 2\sqrt{3}\sin A + 2\cos A + 2 = 4\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + 2$. (10 分)

$\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

$\therefore$ 当 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\triangle ABC$ 的周长 L 取得最大值, $\therefore L_{\max} = 4 + 2 = 6$,

$\because \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}, \therefore L > 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 4$.

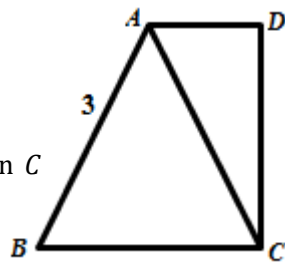
$\therefore \triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(4, 6]$. (12 分)

19. 【解析】(1) $\sqrt{3}\sin A\sin C + \sin A\cos C = \sin B + \sin C$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin A\sin C + \sin A\cos C = \sin A\cos C + \cos A\sin C + \sin C$

$\therefore \sqrt{3}\sin A\sin C = \cos A\sin C + \sin C \Rightarrow \sqrt{3}\sin A = \cos A + 1$,

$\therefore 2\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$.

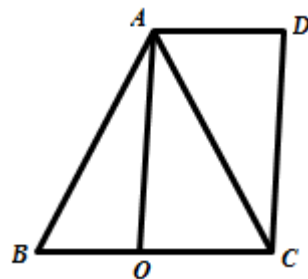


(2)法一 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\therefore \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{1}{4}\left(9 + b^2 + 2 \cdot 3 \cdot b \cdot \frac{1}{2}\right) \Rightarrow b^2 + 3b - 10 = 0$$

$$\therefore (b-2)(b+5) = 0, b = 2, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



法二,如图,因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,所以 $AD \parallel BC$,且 $AD = \frac{1}{2}BC$,

取 BC 的中点 O ,连接 AO ,易得四边形 $A OCD$ 为平行四边形,

$$\text{所以 } AO = CD = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ 所以 } \overrightarrow{AO}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}), \text{ 即 } \frac{19}{4} = \frac{1}{4}(9 + b^2 + 3b),$$

$$\text{解得 } b = 2, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

20. 解:(1)方案一:选条件(1).

由 $b \sin A + \sqrt{3}a \cos B = \sqrt{3}c$ 及正弦定理可得, $\sin B \sin A + \sqrt{3} \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin C$, (1分)得

$$\sin B \sin A + \sqrt{3} \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin (A+B) = \sqrt{3} \sin A \cos B + \sqrt{3} \cos A \sin B,$$

结合 $\sin B \neq 0$,得 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$,所以 $\tan A = \sqrt{3}$.又 $A \in (0, \pi)$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$. (4分)

方案二:选条件(2).

$$f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2\cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ (2分)}$$

$$\text{易知 } f(A) = -2, \text{ 所以 } \cos \left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = -1, \text{ 得 } A = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}. \text{ (5分)}$$

方案三:选条件(3).

$$\text{由 } \cos B (\tan A + \tan B) = 2 \sin C \text{ 可得 } \cos B \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} \right) = 2 \sin C, \text{ (1分)}$$

$$\text{得 } \frac{\cos B \sin A}{\cos A} + \sin B = 2 \sin C, \text{ 即 } \frac{\cos B \sin A}{\cos A} + \frac{\sin B \cos A}{\cos A} = 2 \sin C \text{ 可得 } \frac{\sin C}{\cos A} = 2 \sin C, \text{ (3分)}$$

$$\text{易知 } \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \text{ (4分)}$$

$$\text{结合 } 0 < A < \pi \text{ 可得 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{(2) 在 } \triangle ABC \text{ 中, 设 } AC = 1, \text{ 则 } AB = 3, \text{ 结合余弦定理可得, } BC^2 = 9 + 1 - 2 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7, \text{ 得 } BC = \sqrt{7}.$$

$$\text{设 } BD = CD = x, AD = y, \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理可得, } x^2 = 9 + y^2 - 3\sqrt{3}y,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理可得, } x^2 = 1 + y^2 - \sqrt{3}y, \text{ (8分)}$$

$$\text{解得 } y = \frac{4\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{21}}{3}, \text{ (9分)}$$

$$\text{所以在 } \triangle BCD \text{ 中, } BC = \sqrt{7}, BD = CD = \frac{\sqrt{21}}{3}, \text{ 可得 } \cos \angle BDC = \frac{\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times \frac{\sqrt{21}}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{3}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \angle BDC = \frac{2\pi}{3}. \text{ (10分)}$$