

极值点偏移的题型发展

苏凡文¹ 王志豪²

(1. 山东省泰安宁阳一中 271400; 2. 山东省宁阳县第二实验中学 271400)

摘要:数学内容的本质教学关乎着数学教学的成败,本文以最近几年比较热的知识点“极值点偏移”为例谈一下数学内容的本质教学.

关键词:题型发展;极值点偏移;化归;单调函数

中图分类号:G632

文献标识码:A

文章编号:1008-0333(2021)01-0011-03

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出:“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质.”数学知识的学习在一定程度上可以认为是数学内容本质的发散性学习,数学题目的命制也是基于数学内容本质的发散性应用.

极值点偏移的题目在目前已形成了固定的解题模式,此类题目在高考与各种模拟考试中担当压轴重任,成为函数题目中的一道靓丽风景.

一、极值偏移的内容本质

1. 代数定义

对于可导函数 $y=f(x)$, 在区间 (a, b) 上只有一个极大(小)值点 x_0 , 方程 $f(x)=0$ 的解分别为 x_1, x_2 , 且 $a < x_1 < x_2 < b$.

(1) 若 $f(x_1) < f(2x_0 - x_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ ($\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$), 即函数 $y=f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极值点右(左)移;

(2) 若 $f(x_1) > f(2x_0 - x_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ ($\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$), 即函数 $y=f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极值点左(右)移.

2. 图象解释

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》在阐述直观想象素养时指出:“通过高中数学课程的学习,学生能提升数形结合的能力,发展几何直观和空间想

象能力;增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识;形成数学直观,在具体的情境中感悟事物的本质.”借助直观的图象解释抽象的代数定义是数学教学的常用手段.极值点偏移源于函数图象的偏对称,常见以下四种偏对称图象.

(1) 极值点左移

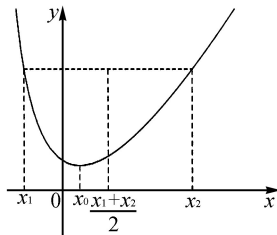


图1

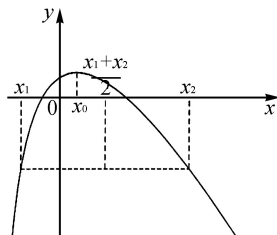


图2

(2) 极值点右移

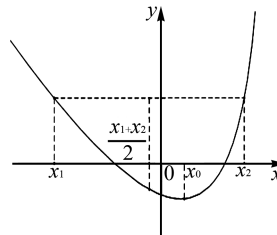


图3

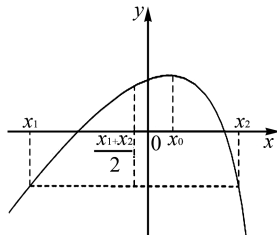


图4

二、题型发展

1. 基本的极值点偏移题目

极值点偏移的题目经广大一线教师的细致研究,早已形成了固定的解题模式.以“已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$

收稿日期:2020-10-05

作者简介:苏凡文(1977.11-),男,山东省宁阳县人,本科,中学高级教师,从事中学数学教学研究.

王志豪(1978.12-),男,山东省宁阳县人,本科,中学高级教师,从事中学数学教学研究.

万方数据

$(x_1 < x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2x_0$ ”为例.

(1) 求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 确定函数 $f(x)$ 的单调区间, 求出极值点, 确定 $x_1 < x_0, x_2 > x_0$;

(2) 构造函数 $g(x) = f(x) - f(2x_0 - x), x < x_0$, 注意 $g(x_0) = 0$;

(3) 求函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$, 确定 $g(x)$ 在 $x < x_0$ 时的单调性, 得出 $g(x)$ 与 0 的大小关系, 进而得到 $f(x)$ 与 $f(2x_0 - x)$ 的大小关系;

(4) 由 $x_1 < x_0$, 得到 $f(x_1)$ 与 $f(2x_0 - x_1)$ 的大小关系, 由 $f(x_1) = f(x_2)$, 得到 $f(x_2)$ 与 $f(2x_0 - x_1)$ 的大小关系;

(5) 由 $x_2 > x_0, 2x_0 - x_1 > x_0$ 及 $f(x)$ 在 $x > x_0$ 时的单调性得到 x_2 与 $2x_0 - x_1$ 的大小关系, 进而得到 $x_1 + x_2 > 2x_0$.

例 1 (2010 年天津·理 21) 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 已知函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) > g(x)$;

(3) 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

例 2 (2016 年新课标 I·理 21) 已知函数 $f(x) = (x - 2)e^x + a(x - 1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

2. 化归法在极值点偏移中的应用

化归是数学解题中常用的数学思想, 通过等价转化将复杂的问题转化为熟悉的问题. 有时可将所证不等式通过换元转化为常见的极值点偏移的形式, 并构造出相应的函数, 有时可以根据方程将所证不等式转化为极值点偏移问题.

例 3 已知函数 $f(x) = ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2a$.

分析 (2) 中, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t} (t > 0)$. 于是原命题等价于“已知函数 $g(t) = \frac{a}{t} + \ln t$, 若方程 $g(t)$ 有两个不相等的实根 t_1, t_2 , 求证: $t_1 + t_2 > 2a$ ”.

例 4 已知函数 $f(x) = x \ln x - x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 x_1, x_2 是函数 $y = \frac{f(x)}{x} - x^3 + 3$ 的两个零点, 求证: $x_1 x_2 > e^{-\frac{10}{3}}$.

分析 (2) 中, $y = \ln x - x^3 + 2$, 所以 $\begin{cases} \ln x_1 = x_1^3 - 2, \\ \ln x_2 = x_2^3 - 2. \end{cases}$ 所

以 $\ln x_1 x_2 = x_1^3 + x_2^3 - 4$. 要证 $x_1 x_2 > e^{-\frac{10}{3}}$, 只需证 $\ln x_1 x_2 > -\frac{10}{3}$, 即证 $x_1^3 + x_2^3 - 4 > -\frac{10}{3}$, 即证 $x_1^3 + x_2^3 > \frac{2}{3}$. 令 $t = x^3$,

则 t_1, t_2 为 $g(t) = \frac{1}{3} \ln t - t + 2$ 的两个零点, 需证 $t_1 + t_2 > \frac{2}{3}$.

3. 两次极值点偏移在题目中的应用

对于先增后减再增或先减后增再减的函数, 若其图象满足两个偏对称, 则可以构造如下类型的题目.

满足图 5 的函数, a, b 为两个极值点, 其中 $x_1 + x_2 > 2a, x_2 + x_3 < 2b$, 则 $x_3 - x_1 < 2b - 2a$;

满足图 6 的函数, a, b 为两个极值点, 其中 $x_1 + x_2 > 2a, x_2 + x_3 < 2b$, 则 $x_3 - x_1 > 2a - 2b$.

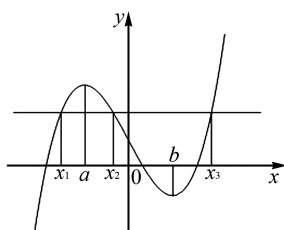


图5

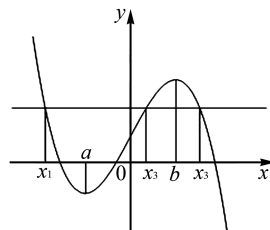


图6

例 5 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + ax + 2 \ln x (a \in \mathbf{R})$ 在 $x = 2$ 处

取得极值.

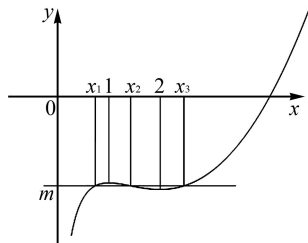


图7

(1) 求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设方程 $f(x) = m$ 有三个实根 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 求证: $x_3 - x_1 < 2$.

分析 (1) $a = -3$, 单调增区间 $(0, 1), (2, +\infty)$, 单调减区间 $(1, 2)$.

(2) 由题意可得 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$. 由极值点偏移可以分别证明 $x_1 + x_2 > 2, x_2 + x_3 < 4$, 所以 $x_3 - x_1 < 2$.

4. 内嵌于导函数中的极值点偏移问题

对于先增后减再增或先减后增再减的函数来说, 若其导函数图象满足偏对称, 可根据导函数中的极值点偏移, 构造不等式 $x_1 + x_2 < 2x_0 (x_1 + x_2 > 2x_0)$, 得到 $x_1 < 2x_0$

$-x_2(x_1 > 2x_0 - x_2)$, 进而构造与 $f(x_1)$ 及 $f(x_2)$ 相关的不等式题目.

例 6 (2019-2020 泰安上学期期末第 22 题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 设函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$, 证明: $g(a) \leq 1$;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 证明: $h(x_1) + h(x_2) > 2$.

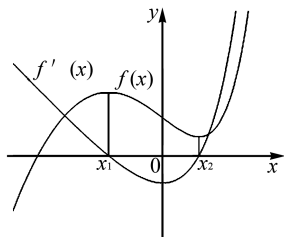


图8

分析 (2) 中, 由函数 $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 得 $a > 1$, 且 $x_1 < 0 < x_2$. 由极值点偏移可证得 $x_1 + x_2 < 0$, 即 $x_1 < -x_2 < 0$. 于是 $x < 0$ 时, $h(x_1) > h(-x_2)$. 所以 $h(x_1) + h(x_2) > h(-x_2) + h(x_2)$. 构造函数 $\varphi(x) = h(-x) + h(x)$ ($x < 0$), 可证明 $\varphi(x) > 2$.

5. 单调函数转化为极值点偏移问题

单调函数看似与极值点偏移没有关系, 其实也有着紧密的联系. 将单调函数的图象关于与其相交的平行于横坐标轴的直线对称翻折, 即可建立起先增后减或先减后增的偏对称图象, 从而构造极值点偏移的题目.

在图 9 中, 函数是单调递增的, $f(x_0) = m$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 2m$, 将 $x > x_0$ 时的图象沿直线 $y = m$ 对称翻折得图象如图 10 所示, 从而建立起偏对称图象, 可证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$.

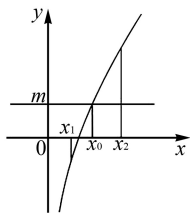


图9

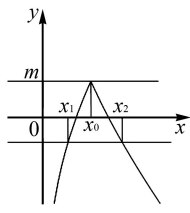


图10

例 7 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 + (a-1)x$, 其导函数 $f'(x)$ 的最大值为 0.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若 $f(x_1) + f(x_2) = -1$ ($x_1 \neq x_2$), 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

分析 由 (1) 知 $a = 1$, 则 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 的图象解释如下:

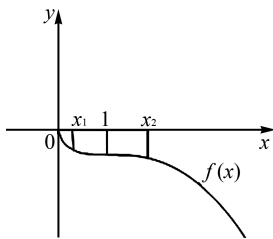


图11

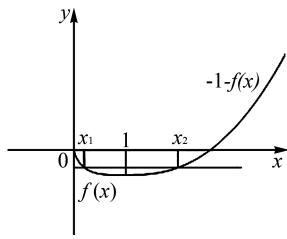


图12

不妨设 $x_1 < x_2$, 可证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(1) = -\frac{1}{2}$. 因为 $f(x_1) + f(x_2) = -1$, 所以 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 要证明 $x_1 + x_2 > 2$, 只需证 $x_2 > 2 - x_1$. 因为 $x_2 > 2 - x_1 > 1$, 只需证 $f(x_2) < f(2 - x_1)$,

因为 $f(x_2) = -1 - f(x_1)$, 只需证 $-1 - f(x_1) < f(2 - x_1)$, 即证 $f(x_1) + f(2 - x_1) + 1 > 0$.

构造函数 $g(x) = f(x) + f(2 - x) + 1$ ($0 < x < 1$), 证明 $g(x) > 0$ 即可.

例 8 已知函数 $f(x) = x - a \ln x - 1$ (a 为常数) 的图象与 x 轴有唯一的公共点 A .

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 $a^2 - a - 3$, 若存在不相等的正实数 x_1, x_2 , 满足 $|f(x_1)| = |f(x_2)|$, 证明: $x_1 x_2 < 1$.

分析 (2) 中, 易得 $a = -2$, $f(x) = x + 2 \ln x - 1$. 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. 不妨令 $x_1 < x_2$, 由 $|f(x_1)| = |f(x_2)|$, 知 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, 且 $f(x_1) = -f(x_2)$. 若证 $x_1 x_2 < 1$, 只需证 $\ln x_1 + \ln x_2 < 0$, 即证 $x_1 + x_2 > 2$, 构造函数 $g(x) = f(x) - f(2 - x)$ ($0 < x < 1$) 即可进行证明.

自恢复高考以来, 教材内容不断更新完善, 一些经典题目却历久弥新, 即使不断更换马甲, 但其本质内容几十年没有改变, 就像陈年的老酒, 放得时间越长, 越值得细细品味. 作为一线数学教师, 讲透数学知识内容的本质属性是提高学生解题能力的根本.

参考文献:

[1] 张小彦. 高等数学背景下的极值点偏移问题探究[J]. 数理化解题研究, 2019(28): 25-26.

[责任编辑: 李璟]