解决立体几何问题中空间向量的运用

云南省曲靖市民族中学　　李光所

【摘　要】 空间向量拥有几何和代数的双重思想，在立体几何问题中运用空间向量所依托的线性关系解决问题，可建立起空间向量与代数和几何之间的联系，促进高中数学中代数和几何相融合，改善空间几何传统解题过程过于复杂、正确率不高的现状。本文对立体几何问题中运用空间向量的价值进行分析，并依托数学例题对空间向量在立体几何问题中的具体运用进行探讨。

【关键词】 立体几何；空间向量；解题思路

一、立体几何问题中运用空间向量的价值

1. 简化立体几何解题步骤

在立体几何问题解决中，运用空间向量思维方法可将空间问题转化为平面问题、几何问题转化为代数问题进行解决，简化立体几何的传统解题过程。空间向量主要解决的是点、线、夹角和距离之间的问题，这种解题方式可减少学生对数学思维的转换难度，同时将原题中的辅助线替代为坐标系，还能够促使解题步骤与过程的进一步简化，体现出空间向量解题的优越性。

2. 理清立体几何解题思路

在立体几何解题中，传统的解题方法是学生先利用相关的定理和公式明确解题思路，之后再运用多种思维进行转换，这样才能完成解题过程。传统解题方法过于复杂，对于思维转换能力偏差的学生而言，增加了解题的困难程度。而运用空间向量解决立体几何问题，虽然在一定程度上增加了计算过程的复杂性，但是却能够帮助学生快速理清解题思路，淡化由“形”到“形”的推理过程，进一步明确解题目的，提高学生解题能力。

3. 赋予数学解题的简捷美

在立体几何解题中，可利用空间向量的直角坐标运算解决空间垂直与平行的问题，利用向量的夹角公式求出两条直线的夹角和线面夹角，利用向量的距离公式求出两点间的距离和两面角的平面角。通过运用空间向量方法解决较为复杂的立体几何问题，能够使解题过程清晰明了，解题书写内容简捷和谐。

二、在立体几何问题中空间向量的运用方法

空间向量主要运用于立体几何中的空间垂直证明、空间平行证明、空间角求解和空间距离求解四个方面，下面对垂直与平行问题和空间角问题的解题方法进行例题探讨。

1. 空间向量在解决平行垂直问题中的应用

在运用空间向量证明线面平行时，应明确两种解题思路：一是可根据线面平行的判定定理，通过证明直线的方向向量与平面内一条直线的方向向量平行得出结论；二是通过证明直线的方向向量与平面的法向量垂直得出结论。在运用空间向量证明面面垂直时，也可采用两种解题思路：一是运用判定定理通过证明线线垂直得出结论；二是通过证明两个平面的法向量垂直得出结论。

例 1　如图 1 所示，在底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp ABCD$，E 是 PC 中点，F 是 PD 中点，$PA=AB=1$，$BC=2$。求证：（1）EF ∥平面 PAB；（2）平面 $PAD\perp$平面 PDC。

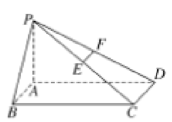

图 1

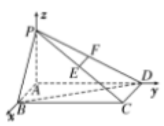

图 2

证明：以 A 为原点建立空间直角坐标系（如图 2 所示），可知 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，由此可获得 $E\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$。

（1）$\because \overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$，即 $EF\parallel AB$。

又$\because AB\subset$平面 PAB，$EF\not\subset$平面 PAB，$\therefore EF\parallel$平面 PAB。

（2）$\because \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,2,0)\cdot(1,0,0)=0$，$\therefore \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$，即 $AP\perp DC$，$AD\perp DC$。

又$\because AP\cap AD=A$，$AP\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，$\therefore DC\perp$平面 PAD。$\because DC\subset$平面 PDC，$\therefore$平面 $PAD\perp$平面 PDC。

2. 利用空间向量在空间角问题中的应用

在立体几何中，求空间角与距离是一类较为重要的问题，在历年的高考中均有此类题型出现，由此使得空间角成为立体几何教学的重点内容。在解决空间角问题的过程中，可对空间向量进行合理运用，通过空间向量的引入，能够为代数方法解决立体几何问题提供有效的工具。在解题时，可以用定量计算代替定性分析，这样一来，能够使烦琐的推理论证过程得以简化，有助于加快解题速度，提高解题效率。

例 2　如图 3 所示。在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，现将 $\triangle ABC$ 沿着平面 ABC 的法向量平移至 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置处，已知 $BC=CA=CC_1$，取 A_1B_1、A_1C_1 的中点 D_1 和 F_1。求 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值。

解：以点 C 作为坐标原点，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，具体如图 4 所示。

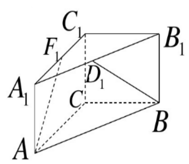

图 3

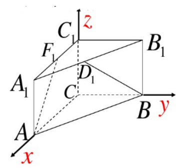

图 4

设 $CC_1=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$F_1\left(\frac{1}{2},0,a\right)$，$D_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$\therefore \overrightarrow{AF_1}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，$\overrightarrow{BD_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，

$$\therefore \cos<\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{BD_1}>=\frac{\overrightarrow{AF_1}\overrightarrow{BD_1}}{\left|\overrightarrow{AF_1}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{-\frac{1}{4}+1}{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{30}}{10}。$$

$\therefore BD_1$ 与 AF_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$。

例 3　如图 5 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=8$，$AA_1=4$，M 为 BC_1 上的一点，且 $B_1M=2$，点 N 在线段 A_1D 上，$A_1D\perp AN$。求 AD 与平面 ANM 所成角的正弦值。

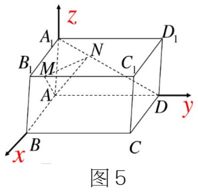

图 5

（下转第 84 页）

直观呈现，让小学生数学思维可视化

江苏省徐州市民富园小学　　陈思彤

【摘　要】　心理学研究认为，小学生的思维方式侧重于形象思维。所以，在小学数学教学中，教师要善用直观的教学手段为学生提供具体的知识情境，从而有利于小学生的思维感知。本文围绕如何在小学数学教学中直观呈现知识进行阐述，旨在培养学生的思维能力，进而达到提高教学效果的目的。

【关键词】　小学数学；直观性；呈现；思维；理解；教学

皮亚杰研究认为，前运算阶段的儿童是通过形象思维认识未知的，他们认识事物的过程中遵循感知具体形象事物为主的规律，并通过丰富的表象进行概括与归纳，从而得出事物的一般概念。所以，在小学数学教学中，教师要尽量直观地呈现知识。唯有这样，才能帮助小学生理解抽象的数学知识，同时也让他们的思维可视化。

一、利用信息技术，展示知识形成过程

随着信息技术与课堂教学的结合，为教师的知识展示提供了更为广阔的空间。我们知道，信息技术条件下，多媒体技术与微课等教学手段已经有效运用到小学数学课堂中。信息技术能以更加先进的方式来增强课堂教学的针对性，展示知识的形成过程，激活学生的形象思维。例如：在教学“条形统计图和折线统计图”时，就利用多媒体课件把某城市一周的天气状况呈现出来，这样就能让学生通过动态呈现来了解折线图，从而清楚地看到近一周天气变化以及降雨量的状况。在这一过程中，学生对条形统计图与折线统计图的相关知识点有了更为深入的了解。同时，这样的知识展示也激发了小学生的学习兴趣，从而提高了课堂教学效果。随着信息技术的发展，课堂教学手段变得更加丰富多样。教师在展示教学内容，尤其是重点与难点时更有针对性，这样就为课堂融入了更多的科技元素，有利于学生了解数学知识的形成与发展课程，大大优化了学生的思维认知，为提高教学效果提供了可能。

二、重视直观体验，建立数学空间观念

心理学研究认为，儿童的思维是建立在直观感觉的基础之上的，直观体验是获得认知的直接方式。因此，小学数学教学要重视小学生的这种直观思维认知方式。这就需要教师在教学过程中尽量呈现数学的表象知识，帮助学生建立数学空间观念，不断拓宽学生的知识视野，从而让思维变得更加可视。例如：在教学“观察物体”时，我们知道这一章节的教学目的是培养学生的空间几何概念，帮助学生建立图形与数量之间的关系。观察物体就是通过物体的形状与几何图形相结合，从而建立空间概念。教学过程中就引导学生回顾生活中见到过哪些物体，这些物体具有怎样的特征，这样做的目的是帮助学生建立空间图形在头脑中的概念。接着，通过教具搭积木引导学生观察积木的形状，在搭积木过程中发现不同形状的积木具有什么特征，学生们发现三角形的积木不容易累积到一起，而正方体与长方体的积木很容易累得很高。这样，学生的直观体验产生了，从而在大脑中初步建立了物体的表象，思维的认知过程变得清晰可视，进而建立数学空间观念。

三、联系生活教学，感受数学实用价值

数学知识与生活的联系是不言而喻的。小学生在学习数学的过程中，往往利用生活经历来思考问题，这不仅是数学实用价值的体现，也是学生思维活动的必然。基于此，教师要善于从实际生活中选取案例呈现数学知识，从而让学生充分感受到数学知识与生活的联系。例如：在教学“循环小数”时，为了帮助学生理解循环小数的目的，就利用多媒体制作课件。课件中播放电子广告牌中不停闪烁的霓虹灯场景，不同颜色的灯光有规律地闪烁。接着启发学生思考这样的问题：不同颜色的灯光在闪烁过程中有什么规律？为什么要有不同的变化颜色？这个问题是学生生活中常见的现象。于是学生们纷纷踊跃回答，向大家说明了先出现什么颜色，后出现什么颜色，并且在一定时间内反复出现。就在学生回答的过程中，教师在黑板上分别写下了这样的关键词：“依次、重复、不断出现”……当学生们看到这样的关键词时若有所悟，此时教师就顺利引入教学的主题：循环小数就具有这样的特征，于是顺利引入本节课的教学中。因为有了上述的交流与讨论，学生对循环小数的概念有了深刻的理解。

四、利用数形结合，加深理解概念知识

数形结合是解决数学问题的一种思想方法，熟练利用数形结合思想可以有效解决问题，并能让学生的思维变得更加清晰、更加敏捷。基于此，教师要有意识地渗透数形结合思想，帮助学生加深对数学概念的理解，进一步促进学生数学思维的敏捷度。例如：在教学“乘法分配律”时，就利用图形呈现的方式展现乘法分配律，这样就创设了一个清晰的直观情境，从而把抽象化的思维活动变得清晰可感，加深学生对分配律这个概念的理解。多媒体课件出示问题：学校要改造一个长为 200 米，宽为 80 米的长方形操场，如果在不改变其长度的情况下，增宽 20 米，那么操场的总面积应该是多少？要解决这样的问题，就要通过画图把扩建前后的长和宽都呈现出来，这样才能让学生深入探究乘法分配律的意义。通过画图把数字与图形结合到一起，有利于学生掌握乘法分配律的基本模型，从而改变传统教学中死记硬背的办法。通过数形结合，清晰呈现了乘法分配律，让学生体验到数学知识的趣味性与实用性，也优化了学生的思维认知过程。

综上所述，在小学数学教学中，通过直观呈现知识可以让学生的思维变得可视化。所以，教师要科学运用直观呈现的教学方法开展教学，这样既有利于学生深入理解数学知识，更能培养学生的自主学习

（下转第 90 页）

（上接第 75 页）

解：由图可知，$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,4)$，$D(0,8,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=(0,8,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,8,-40)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1D}>=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

故 AD 与平面 ANM 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

通过上述例题的分析可以看出，在空间角求解中，对空间向量进行运用，能够使烦琐的解题过程得以简化，为学生快速求解提供了有效的方法。

总而言之，在高中数学教学中，将空间向量运用到立体几何问题的解决中来，有利于简化解题过程，帮助学生形成完整的解题思路，对培养学生发散性思维和提升学生数学学习能力起着积极作用。在数学解题中，教师要引导学生掌握空间向量解决立体几何平行问题、垂直问题、空间距离问题以及空间角问题的方法，帮助学生提高解题效率和准确性。

【参考文献】

[1] 王千迎 . 空间向量在立体几何中推广与运用 [J]. 课程教育研究，2017（9）：106-108.

[2] 徐巧石 . 空间向量在立体几何存在性问题中的应用探究 [J]. 中学数学，2015（6）：82-84.

[3] 李芳奇，唐恒钧 . 利用空间向量特殊化与几何性质解立体几何中的轨迹问题 [J]. 中学教研（数学），2015（9）：41-42.