建系有法可依　立几有章可循

——向量建系法在立体几何问题中的应用

顾予恒，　卢成娴

(杭州第二中学钱江学校,浙江 杭州　311215)

摘　要:空间向量法是解决立体几何问题的有效手段之一,充分体现了向量的工具性. 它的优势在于程序化,可以按部就班地借助向量的运算"算出"几何的结果,而不必添那些"从天而降"的辅助线,是空间感较弱学生的"福音". 文章以 2021 年高考立体几何真题为例,从"建 z 轴"的角度整理了几种常见类型的建系方法,让建系设点"有法可依",让立体几何难题"有章可循".

关键词:空间向量法;建系设点;翻折

中图分类号:O123. 2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003-6407(2022)03-0037-05

立体几何是高中数学的重要组成部分,主要考查学生的直观想象和逻辑推理的素养. 空间向量法的引入,将几何问题转化为代数问题,可以借助向量的运算,程序化地"算出"几何的结果,减少了复杂的思维和推理过程,为空间感较弱的学生提供了"救命稻草",因此备受师生们的青睐,建系已经成为解决立体几何问题的一种常用方法[1].

但在日常教学中,很多教师往往更多关注于各种求证与求值公式的运用,而忽略了问题的第一步:建系、设点. 事实上,在很多试卷中出现了不易建系的题目,让学生措手不及. 学生把各解题公式背得滚瓜烂熟,哪知第一步建系都建不对. 答案中的第一步"如图,建系设点……"真的是显然吗?可以说,建系设点是向量法解决立体几何问题中蕴涵几何味的关键所在,也是学生运用向量法的难点.

与平面坐标系相比,空间坐标系将二维平面推广到三维空间,二者最大的差别是 z 轴,因此,z 轴是关键. 纵观 2021 年各省市地区高考试题中的立体几何问题,图形虽然纷繁多样,但从空间向量法的角度来看,最主要的差别是如何建系. 本文以 2021 年的数学高考真题为例,从"建 z 轴"的角度整理了几种不同类型的建系方法,供大家参考.

1　常见立体几何建系类型

类型 1　线面垂直"定"z 轴.

这一类型最简单,其特点是题干给出"线面垂直"这一条件. 在建系时,一般选择垂直于底面的这条线(或这条线的平行线)作为 z 轴,然后建立合适的 x,y 轴.

例 1　如图 1,四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是矩形,$PD\perp$ 底面 $ABCD$,$PD=DC=1$,M 是 BC 的中点,且 $PB\perp AM$.

1)求 BC;

2)求二面角 $A\text{-}PM\text{-}B$ 的正弦值.

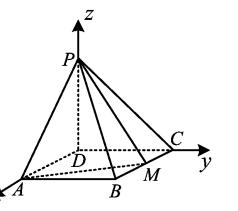

图 1

(2021 年全国数学高考乙卷理科试题第 18 题)

分析　由于本题题干中出现了"$PD\perp$ 面 $ABCD$"这一条件,因此可以直接选择 PD 作为 z 轴. 又因为底面是矩形,所以可以选择以点 D 为原点、以 DA,DC,DP 为 x,y,z 轴建系.

类型 2　面面垂直"作"z 轴.

这一类型的特点是题干给出"面面垂直"这一条件. 在建系时,一般根据面面垂直的性质,在垂直于底面的侧面上作一条直线垂直两面的交线,则所作的直线与底面垂直,即这条直线可以作为 z 轴.

收文日期:2021-08-13;修订日期:2021-09-16

作者简介:顾予恒(1981—),男,浙江杭州人,中学高级教师. 研究方向:数学教育.

万方数据

例 2　如图 2,在三棱锥 A-BCD 中,平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,$AB=AD$,O 为 BD 的中点.

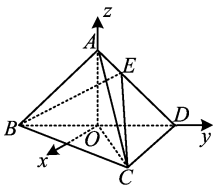

图 2

1)证明:$OA\perp CD$;

2)若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形,点 E 在棱 AD 上,$DE=2EA$,且二面角 E-BC-D 的大小为 45°,求三棱锥 A-BCD 的体积.

(2021 年全国数学高考卷Ⅰ试题第 20 题)

分析　由题干可知 $AB=AD$,又 O 为 BD 的中点,从而 $AO\perp BD$. 因为面 $ABD\perp$ 面 BCD,面 $ABD\cap$ 面 $BCD=BD$,所以 $AO\perp$ 面 BCD. 因此,AO 即为要作的 z 轴. 另外根据第 2)小题知,需在底面 BCD 内另作一条与 OD 垂直的直线作为 x 轴. 因此,以 O 为原点建系(如图 2).

类型 3　底面垂直"造"z 轴.

这一类型的特点是根据题干所给条件,找不到面或线垂直底面. 在建系时,一般选择底面上互相垂直的两条直线作为 x,y 轴,另外"造"一条底面的垂线作为 z 轴.

例 3　在四棱锥 P-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形,$\angle ABC=120°$,$AB=1$,$BC=4$,$PA=\sqrt{15}$. M,N 分别为 BC,CP 的中点,且 $PD\perp DC$,$PM\perp MD$.

1)证明:$AB\perp PM$;

2)求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.

(2021 年浙江省数学高考试题第 19 题)

方法 1　由题干条件可知底面 $ABCD$ 是平行四边形,$\angle BCD=60°$,$CD=AB=1$,$CM=2$,从而 $CD\perp DM$.

因为没有现成的直线与底面 $ABCD$ 垂直,所以以点 D 为原点、以 DM,DC 为 x,y 轴,过点 D 作 z 轴垂直底面 $ABCD$ 建系(如图 3).

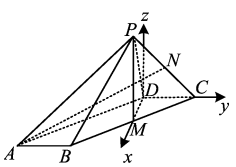

图 3

由于 z 轴是单独"造"出来的,因此几何体中部分点的坐标不能直接"读"出. 如点 P,我们可以先设坐标,再通过运算"求"出.

由题知 $M(\sqrt{3},0,0)$,$C(0,1,0)$,$A(2\sqrt{3},-2,0)$,设 $P(m,n,t)$,由 $PD\perp DC$,$PM\perp MD$,$PA=\sqrt{15}$,可得

$$\begin{cases}(m,n,t)\cdot(0,1,0)=0,\\(\sqrt{3}-m,-n,-t)\cdot(\sqrt{3},0,0)=0,\\(m-2\sqrt{3})^2+(n+2)^2+t^2=15,\end{cases}$$

解得 $m=\sqrt{3}$,$n=0$,$t=2\sqrt{2}$,故 $P(\sqrt{3},0,2\sqrt{2})$.

由此可见,对于坐标不易直接"读"出的点,我们可以先设其坐标. 坐标中的这 n 个未知数,可以通过寻找与该点相关的 n 个条件,对应建立 n 个方程,从而算出点的坐标.

事实上,除了直接"造"z 轴外,若对几何体进一步分析可知 $PM\perp$ 面 $ABCD$. 第 1)小题在善意地提醒考生有线面垂直,可将此题转化为类型 1:线面垂直定 PM 为 z 轴. 因此,有时题干中不直接出现垂直,但要证明的结论里隐藏着垂直,对解题有很好的启示作用.

方法 2　由 $CD\perp DM$,$CD\perp PD$,可知 $CD\perp$ 面 PMD,从而 $CD\perp PM$. 又 $PM\perp MD$,于是 $PM\perp$ 面 $ABCD$. 以点 M 为原点、以 DM,MP 为 x,z 轴,平行于 DC 的直线为 y 轴建系(如图 4). 可"读"出 $M(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},-2,0)$,$B(\sqrt{3},-1,0)$,$D(-\sqrt{3},0,0)$,$C(-\sqrt{3},1,0)$.

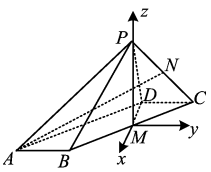

图 4

设 $P(0,0,z)$,则由 $PA=\sqrt{15}$,可知 $z=2\sqrt{2}$. 以下过程略.

对比上述两种方法可知:方法 1 重在程序化的运算;若能数形结合,通过几何分析找到垂直和数量关系,则采用方法 2 可以大幅降低运算量. 这恰恰是本题的魅力所在,不偏不倚,无论建系法还是几何法都没有太占便宜. 想得多一点就可以算得少一点,想得少一点就要算得多一点.

线面垂直定 z 轴、面面垂直作 z 轴、底面垂直造 z 轴,这 3 种建系类型为解决立体几何问题提供了有效法则. 下面以近 5 年浙江省高考立体几何大题为例,梳理以上 3 种建系法的应用,如表 1 所示.

表 1　2016—2020 年高考浙江卷中 3 种建系方法的应用情况

方法	年份	题干关键词
线面垂直定 z 轴	2018	侧棱 AA_1,BB_1,CC_1 均垂直平面 ABC
面面垂直作 z 轴	2016	在三棱台 ABC-DEF 中,平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC
	2019	三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$,平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC
	2020	在三棱台 ABC-DEF 中,平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC
底面垂直造 z 轴	2017	四棱锥 P-$ABCD$,$\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形,$BC/\!/AD$,$CD\perp AD$,$PC=AD=2DC=2CB$,E 为 PD 的中点.

由表 1 可知,3 种建系方法在前 5 年浙江省高考立体几何解答题中均有所应用,其中应用较多的还是“面面垂直作 z 轴”. 由此可见,利用面面垂直的性质定理作垂线是浙江省数学高考的一个热点问题.

2　向量建系法在翻折问题中的应用

立体几何问题首先要依托于几何体,几何体的构建方式主要有两种:切割与翻折. 上述的讨论均是在切割体(主要是从长方体中切割而来的多面体)中的应用. 那么,对于翻折问题,这 3 种建系方法是否依然适用呢? 答案是肯定的!

下面通过一道例题简单介绍空间向量法在翻折问题中的应用.

例 4　已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4,M,N 为 AB,AC 的中点,如图 5,沿 MN 将 $\triangle AMN$ 折起. 当直线 AB 与平面 $BCNM$ 所成的角最大时,线段 AB 的长度为　(　　)

A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{3}$

分析　翻折是一个动态变化的过程,本题中点 A 是图形真正变化的元素. 由于没有现成的垂直,因此在建系时,采用类型 3,需要另外单独“造”z 轴. 在设点时,可以选取翻折角度(设为 θ)为变量.

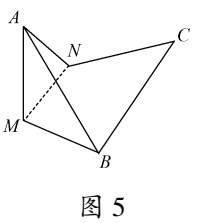

图 5

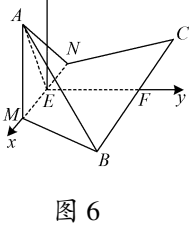

图 6

解　因为等边 $\triangle ABC$ 是对称图形,所以取 MN 和 BC 的中点 E,F,联结 EF,则 $MN\perp EF$. 以 E 为坐标原点、分别以 EM,EF 所在直线为 x,y 轴,过点 E 作 z 轴 $\perp$ 底面 $MBCN$ 建系(如图 6).

由题设可知 $B(2,\sqrt{3},0)$,记 $\angle AEF=\theta$,则 $A(0,\sqrt{3}\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$,$\overrightarrow{AB}=(2,\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta,-\sqrt{3}\sin\theta)$,平面 $MBCN$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$.

设直线 AB 与平面 $BCNM$ 所成的角为 α,则

$$\sin\alpha=\frac{|-\sqrt{3}\sin\theta|}{\sqrt{10-6\cos\theta}}=\sqrt{\frac{3-3\cos^2\theta}{10-6\cos\theta}}.$$

令 $10-6\cos\theta=t$,则 $\cos\theta=\dfrac{10-t}{6}$,从而

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{3-3\cdot\dfrac{(10-t)^2}{36}}{t}}=\sqrt{\frac{-t^2+20t-64}{12t}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{64}{t}\right)}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3},$$

当且仅当 $t=8$ 时取到等号,此时 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$,$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,$\overrightarrow{AB}=\left(2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,故 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$.

例 4 是将等边三角形沿着中位线进行翻折,如果改为正方形沿着对角线翻折,就变成了 2021 年 1 月的浙江学考题.

变式 1　如图 7,在三棱锥 D-ABC 中,$AB=BC=CD=DA$,$\angle ABC=90°$,E,F,O 分别是棱 BC,DA,AC 的中点. 记直线 EF 与平面 BOD 所成角为 θ,则 θ 的取值范围是　(　　)

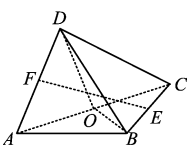

图 7

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2021 年 1 月浙江省数学学考试题第 18 题)

分析　虽然题干条件中并未出现“翻折”二字,但事实上,此题中点 D 的位置是不确定的. 若以动态视角来看,这个几何体可以看做是一个正方

形沿着对角线 AC 翻折得到. 随着翻折角度的变化,θ 也跟着变化. 由此可见,这是一道经过“包装”的翻折问题.

解 因为 $OB\perp OC$,故以 O 为原点、以 OB,OC 所在直线为 x,y 轴、过点 O 作 z 轴 $\perp$ 底面 ABC 建系(如图 8). 不妨设 $AB=\sqrt{2}$,$\angle BOD=\alpha$(其中 $\alpha\in(0,\pi)$),则

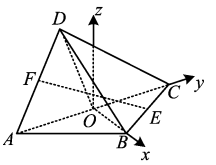

图 8

$$A(0,-1,0),\quad D(\cos\alpha,0,\sin\alpha),$$
$$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\quad F\left(\frac{\cos\alpha}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sin\alpha}{2}\right),$$

从而 $$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{\cos\alpha-1}{2},-1,\frac{\sin\alpha}{2}\right).$$

显然 $\overrightarrow{AO}$ 是面 BOD 的一个法向量,$\overrightarrow{AO}=(0,1,0)$,故

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha-1}{2}\right)^2+1+\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\cos\alpha}}.$$

因为 $\cos\alpha\in(-1,1)$,所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\cos\alpha}}\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,即 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 故选 C.

3 向量建系法在几何命题中的应用

由此,我们发现用建系法解决翻折问题,一般都可以通过“造”z 轴建立坐标系,以翻折因素(如角度、长度)为变量设点,实质就是通过运算求出动点的坐标. 抓住了这个核心方法,我们还可以利用建系法来构造几何体[2].

例如,我们对变式 1 进一步改编,可构造新的几何体. 为了让几何体更加新颖,可以将变式 1 中的底面 Rt$\triangle ABC$ 改为直角梯形 $ABCD$. 设 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形,$AP\perp PD$,$CD\perp AD$,$AD=2DC=2BC=2$(如图 9). 为了加大难度,可以选择 $\triangle PAD$ 沿着 AD 翻折 60°时的情况,一旦翻折到位,这个几何体就是一个确定的几何体,此时可以通过建系法确定点 P 的位置. 我们还可以通过“包装”,隐去“翻折 60°”的条件. 通过计算可知当翻折 60°时,棱长 PC 恰好为 2,故可以用 $PC=2$ 作为条件来代替. 这样,一道**高方数据**问题的几何体就构造完成了.

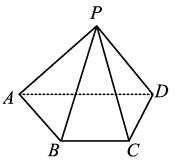

图 9

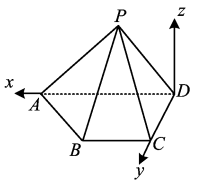

图 10

变式 2 如图 9,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形,$BC/\!/AD$,$CD\perp AD$,$PC=AD=2DC=2BC=2$.

命题角度 1 建系设点定图形.

命题 1 请建立合适的空间直角坐标系,并写出各点坐标.

分析 由题干可知,此题需要单独“造”z 轴. 注意到底面 $ABCD$ 中有 $CD\perp AD$,因此可取点 D 为原点、以 DA,DC 为 x,y 轴,再确定 z 轴建系.

可以依次“读”出 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,接着点 P 的坐标需要通过条件算出来. 设点 $P(m,n,t)$,则点 P 满足 $PA=PD=\sqrt{2}$,$PC=2$ 这 3 个长度条件,即

$$\begin{cases}(m-2)^2+n^2+t^2=2,\\ m^2+n^2+t^2=2,\\ m^2+(n-1)^2+t^2=4,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}m=1,\\ n=-\dfrac{1}{2},\\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$$

故 $$P\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

为了使几何体元素更加丰富,我们可以增加点和直线,如取 PD 的中点 E,联结 CE. 基于这一图形,我们可以从证明平行垂直、求空间角、计算距离等角度编制问题.

命题角度 2 平行垂直“算”证明.

命题 2 证明:$CE/\!/$平面 PAB.

命题角度 3 公式得出线线角.

命题 3 求异面直线 AB 与 PD 所成角的余弦值.

命题角度 4 公式求解线面角.

命题 4 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

命题角度 5 公式计算二面角.

注 重 回 归 课 本　加 强 融 会 贯 通

——2021 年高考全国乙卷导数题的探究剖析与教学思考

余树宝[1]，　肖婧钰[2]

(1. 合肥工业大学附属中学,安徽 合肥　230009;2. 合肥师范学院数学与统计学院,安徽 合肥　230601)

摘　要:导数及其应用是高考的重要考点之一. 导数题能综合考查学生多方面的学科素养、关键能力和必备知识,渗透多种数学思想方法,其要求之高,难度之大,让广大考生心有余悸. 文章以一道高考导数题教学为例,谈谈此类题的教学过程、设计意图及教学思考.

关键词:高考;导数;教学;思考

中图分类号:O122. 1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003-6407(2022)03-0041-04

函数是高中数学的重要知识点之一,导数为研究函数图像的切线、单调性、极值(最值)等方面提供了最有效的工具,因此在历届高考中,对导数及其应用的考查都非常突出.

在高考中,对导数及其应用的考查一般关注以下 5 个方面:利用导数的几何意义求函数图像的切线方程;利用导数求函数的单调区间,判断单调性;已知函数单调性求参数或其取值范围;利用导数求函数的最值(极值);利用导数解决函数的零点、方程的根或不等式的解等问题. 重点考查理性思维和数学探索等学科素养,考查逻辑思维、运算求解等关键能力,渗透函数与方程、分类与整合、转化与化归、数形结合等思想方法. 因此,高考导数题对学生素质和能力的要求较高.

针对这一重要考点,笔者以 2021 年全国数学高考乙卷第 20 题的教学为例,谈谈自己的教学过程、设计意图以及教学思考,供同行参考.

命题 5　求二面角 $P\text{-}AD\text{-}B$.

命题 6　求二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 的余弦值.

命题角度 6　各有妙招求距离.

命题 7　求点 E 到直线 AB 的距离.

命题 8　求点 E 到平面 PBC 的距离.

命题 9　求直线 CE 与平面 PAB 间的距离.

命题 10　定义:两条异面直线之间的距离是指其中一条直线上任意一点到另一条直线距离的最小值. 请用这一定义,求直线 AB 与 PD 之间的距离.

命题角度 7　空间向量的问题.

命题 11　设向量 $\overrightarrow{CE}$ 在向量 $\overrightarrow{PA}$ 上的投影向量为 $\lambda\overrightarrow{PA}$,求 λ 的值.

事实上,这些命题与条件"$PC=2$"是等价的,只要将其中任何一个命题作为条件,这个四棱锥就唯一确定,也就可以推导出其他 10 个命题. 2017 年浙江省数学高考立体几何解答题就是以本题题干为背景,上述命题 2 与命题 4 即为高考原题.

4　结束语

由上述分析可知,无论是切割模型还是翻折模型,空间向量法可以说是一种"万能"的解法. 它的本质是方程思想,通过坐标的代数运算解决几何问题. 日常教学中要引导学生关注本质,不仅要会算,更要知其然而知其所以然[3]. 本文总结的 3 种类型就是让建系设点"有法可依",让立体几何难题"有章可循",能有效弥补部分学生空间想象能力的不足,对广大学生来说是个"福音".

参　考　文　献

[1]　郑飞鹰. 基于高考题,探讨向量法的建系技巧[J]. 中学数学(高中),2020(17):37-38.

[2]　王永生. 空间向量在立体几何中的应用[J]. 中学数学教学参考,2016(1/2):104-108.

[3]　张志刚. 立体几何的"助力站":空间向量[J]. 中学数学(高中),2020(21):41-42.

收文日期:2021-08-26;修订日期:2021-09-30

万方数据

作者简介:余树宝(1969—),男,安徽合肥人,中学正高级教师. 研究方向:数学教育.