高三数学测试（二）

2021.10

（全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求).

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|(x-2)(x+1)<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2. “$ab>1$”是“$a>1,b>1$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

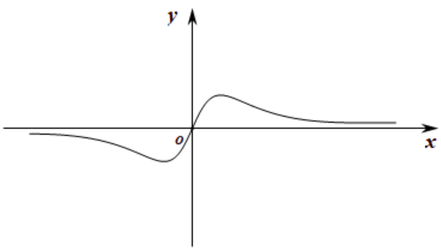
3. $(2x-1)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为（　　）

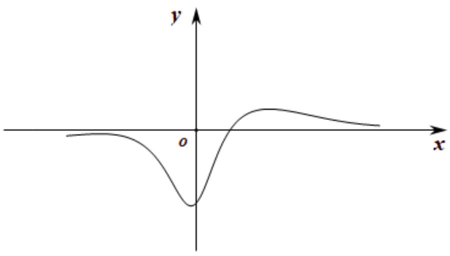
A. 4　　B. -4　　C.32　　D.-32

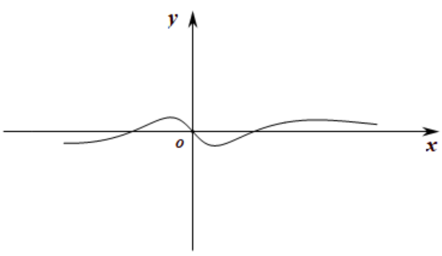
4. 对数的创始人约翰 奈皮尔（*John Napier*，1550—1617）是苏格兰数学家．直到 18 世纪，瑞士数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系．人们才认识到指数与对数之间的天然关系．对数发现前夕，随着科技的发展，天文学家做了很多的观察，需要进行很多计算，而且要算几个大数的连乘，往往需要花费很长时间．基于这种需求，1594 年，奈皮尔运用了独创的方法构造出对数方法．现在随着科学技术的需要，一些幂的值用数位表示，譬如 $2^{10}=1024\in(10^3,10^4)$，所以 2^{10} 的数位为 4（一个自然数数位的个数，叫做数位）．则 2021^{100} 的数位是（　　）．（注 $\lg 2021\approx 3.30557$ ）

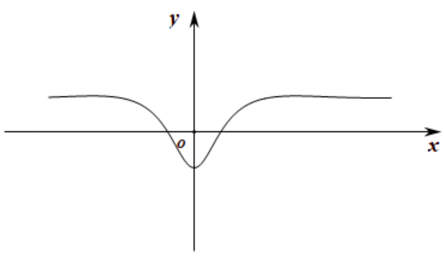
A. 329　　B. 330　　C. 331　　D. 332

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x-2\sin x}{x^2+1}$ 的图像大致为（　　）

A.


B.


C.


D .


6. 已知$a>\frac{3}{2}$且$a\ln\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\ln a$，$b>2$且$b\ln 2=2\ln b$，$c>\frac{5}{2}$且$c\ln\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\ln c$，则（　　）

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

7. 已知ΔABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c若$b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$，且$\Delta ABC$内切圆面积为$9\pi$，则$\Delta ABC$面积的最小值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $9\sqrt{3}$　　D. $27\sqrt{3}$

8. 已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{1-x}+a,x\in[m,n]$的值域为$\left[m,n\right](m<n)$，则实数$a$的取值范围为（　　）

A. $\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$　　C. $[0,\frac{1}{4})$　　D. $(-\frac{3}{4},0]$

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分)

9. 下列命题中，真命题的是（　　）

A. $\forall\alpha$，$\beta\in\mathrm{R},\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　　B. $\exists x_0\in R,e^{x_0}\le 1$

C. $\forall x\in R,x^3>0$　　D. $\exists\alpha_0\in R,\sin\alpha_0=\frac{\pi}{3}$

10. 不解三角形，则下列对三角形解的个数的判断中正确的是（　　）

A. $a=30,b=25,A=150^\circ$，有一解　　B. $a=7,b=14,A=30^\circ$，有两解

C. $a=6,b=9,A=45^\circ$，有两解　　D. $a=\sqrt{3},b=\sqrt{6},A=60^\circ$，无解

11. 已知正三棱锥$S-ABC$的底面边长为 6，侧棱长为$4\sqrt{3}$，则下列说法中正确的有（　　）

A. 侧棱SA与底面ABC所成的角为$\frac{\pi}{4}$

B. 侧面SAB与底面ABC所成角的正切值为$2\sqrt{3}$

C. 正三棱锥$S-ABC$外接球的表面积为64π

D. 正三棱锥$S-ABC$内切球的半径为$\sqrt{13}-1$

12. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin|x|+|\cos x|$，下列说法正确的有（　　）

A. 函数$f(x)$在$[\frac{2}{3}\pi,\frac{7}{6}\pi]$上单调递减

B. 函数$f(x)$是最小正周期为2π的周期函数

C. 若$1<m<2$，则方程$f(x)$=m在区间$[0,\pi]$内，最多有 4 个不同的根

D. 函数$f(x)$在区间$[-10,10]$内，共有 6 个零点

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $p:x>1$ 是 $q:x>a$ 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是_▲_.

14. 已知 α 为锐角，若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$ 的值为_▲_.

15. 在 ΔABC 中，已知角 A 为钝角，且 $4\sin B\sin C=\sin^2 A$， $\sin B+\sin C=m\sin A$，则实数 m 的取值范围为_▲_.

16. 已知不等式 $(e^x-ax)(x^2+ax+1)\geq 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_▲_.

解答题（本大题共 6 小题，计 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的图象在点 $\left(\dfrac{\pi}{3}, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求该函数 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最值.

18.（本小题满分 12 分）

为丰富师生的课余文化生活，倡导“每一天健身一小时，健康生活一辈子”，深入开展健身运动，增强学生的身体素质和团队的凝聚力，某中学将举行趣味运动会。某班共有 10 名同学报名参加“四人五足”游戏，其中男同学 6 名，女同学 4 名．按照游戏规则，每班只能选 4 名同学参加这个游戏，因此要从这 10 名报名的同学中随机选出 4 名，记其中男同学的人数为 X .

（1）求选出的 4 名同学中只有女生的概率；

（2）求随机变量 X 的分布列及数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=6\cos x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{2}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和对称轴方程；

（2）若函数 $y=f\left(x\right)-a$ 在 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 存在零点，求实数 a 的取值范围.

20．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2^x+m\cdot 2^{-x}$ 是奇函数.

（1）求 m 的值；

（2）若在 ΔABC 中存在角 A，使得 $f(\lambda+\lambda\sin A)+f\left(-\cos^2 A-1\right)>0$，求实数 λ 的取值范围.

21．（本小题满分 12 分）

已知 a,b,c 分别为 ΔABC 三个内角 A,B,C 的对边，且满足 $c^2=a^2+ab,$ 记 ΔABC 的面积为 S.

（1）求证：$C=2A$；

（2）若 ΔABC 为锐角三角形，$b=4$，且 $\lambda<S$ 恒成立，求实数 λ 的范围.

22．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ke^x(k\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）当 $k=1$ 时，求函数 $g(x)=xf'(x)-2f(x)-x^3+x+2$ 的单调区间；

（2）当 $k\geq 0$ 时，求证：对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1>x_2$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}$.