扬州市高三数学测试（一）

一、单项选择题

1.已知命题 $p:\exists\alpha\in\mathrm{R},\sin\alpha\geq\dfrac{1}{2}$，则 $\neg p$ 为（　　）

A. $\exists\alpha\in\mathrm{R},\sin\alpha\leq\dfrac{1}{2}$　　B. $\exists\alpha\in\mathrm{R},\sin\alpha<\dfrac{1}{2}$

C. $\forall\alpha\in\mathrm{R},\sin\alpha<\dfrac{1}{2}$　　D. $\forall\alpha\in\mathrm{R},\sin\alpha\leq\dfrac{1}{2}$

2.若非空且互不相等的集合 M，N，P 满足 $M\cap N=M$，$N\cup P=P$，则（　　）

A. $M\subseteq P$　　B. $P\subseteq M$　　C. $M\cup P=N$　　D. $M\cap P=\varnothing$

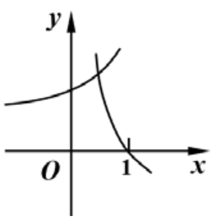
3.已知 $a=\log_{0.6}2$，$b=3^{0.6}$，$c=2^{-1.5}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$b>c>a$　　D．$c>b>a$

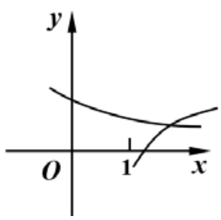
4.“$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$”是“$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$”的（　　）

A．充要条件　B．充分不必要条件　C．必要不充分条件　D．既不充分也不必要条件

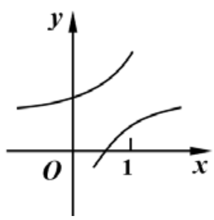
5.在同一直角坐标系中，函数 $y=a^x,y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(a>0，且a\neq 1)$ 的图象可能是（　　）



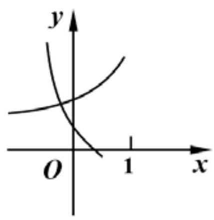
A



B



C



D

6.已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7}$，则 $\tan\beta=$（　　）

A．1　B．3　C．1 或 3　D．$-\dfrac{1}{3}$或$-\dfrac{13}{9}$

7. 意大利画家列奥纳多•达•芬奇（1452.4－1519.5）的画作《抱银貂的女人》中，女士脖颈上黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽，达•芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式：$f(x)=a\cosh\dfrac{x}{a}$，其中 a 为悬链线系数，$\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，相应地双曲正弦函数的表达式为 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$．若直线与 $x=m$ 双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 的图象分别相交于点 A,B，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 与曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P，则下列结论正确的的是（　　）

A．$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$　　B．$y=\sinh x\cosh x$ 是偶函数

C．$(\cosh x)'=-\sinh x$　　　D．若 ΔPAB 是以 A 为直角顶点的直角三角形，则实数 $m=0$

8.定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f(-x)=f\left(4+x\right)$，且当 $x\geq 2$ 时 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+6,2\leq x<8\\1-\log_2 x,x\geq 8\end{cases}$，若对任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f\left(4-x\right)\leq f\left(x+2+t\right)$ 恒成立，则实数 t 的最大值为（　）

A．-2　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

二、多项选择题

9.下列命题正确的有（　　）

A.若角 α 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，则角 α 的取值集合为 $\{\alpha\,|\,\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

B. $\cos\alpha=\cos\beta$ 成立的充要条件是 $\beta=\alpha+2k\pi(k\in Z)$

C. 函数 $y=\frac{1}{1-\tan x}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$

D.在 ΔABC 中，若 $A=60^\circ$，$c=4,a=2\sqrt{3}$，则此三角形只有 1 个解

10.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 BB_1 的中点，则下列叙述中正确的有（　）

A. 直线 A_1B // 平面 MCD_1　　B. 直线 A_1B 与直线 MC 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. 二面角 $M-CD-A$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$　　D. 三棱锥 C_1-MCD_1 的体积为 $\frac{4}{3}$

11.将曲线 $C_1:y=2\sin\frac{x}{2}$ 上各点的横坐标变为到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到曲线 $C_2:y=f(x)$，则下列结论正确的有（　）

A. $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\leq f\left(x\right)$　　B. $f\left(-x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-1,1\right]$　D.方程 $f\left(x\right)=\log_{2\pi}x$ 有三个实根

12. 已知函数 $f(x)=\frac{|x|}{e^x},x\neq 0,e$ 为自然对数底数，$e\approx 2.71828$，关于 x 的方程 $\sqrt{f(x)}+\frac{1}{\sqrt{f(x)}}-2m=0$ 有四个相异实根，则实数 m 的取值可能为（　）

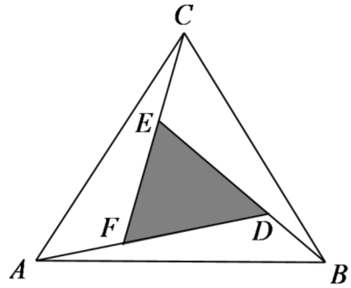
A. -1　　B. $\frac{1}{e}$　　C. $e^{\frac{1}{2}}$　　D. e

三、填空题

13.函数 $y=\ln(-x^2+2x+8)$ 的定义域为 ________.

14.某种灯泡使用寿命在 1000h 以上的概率为 0.2，则 3 个灯泡使用 1000h 后，只坏 1 个的概率为 ________.

15.赵爽是我国古代数学家，大约在公元 222 年，他为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成）类比“赵爽弦图”，可构造如图所示的图形，它是由 3 个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个较大的等边三角形，若 ΔDEF 的面积为 $\sqrt{3}$，且 $\tan\angle CAF=\frac{3}{5}\sqrt{3}$，则 ΔABC 的面积为______.



16.已知函数 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=ax^2(a>0)$．若直线 $y=kx$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，则实数 $k=$________.

若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g\left(x\right)$ 存在公切线，则实数 a 的最小值为______.

四、解答题

17．已知幂函数 $f\left(x\right)=\left(m^2-3\right)x^{m-\frac{3}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $g(x)=2\log_3{}^x+a$．

（1）求 m 的值；

（2）当 $x\in\left[1,9\right]$ 时，记 $f(x),g(x)$ 的值域分别为集合 $M,N,$ 设 $p:x\in M,q:x\in N,$ 若 p 是 q 成立的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

解：（1）由幂函数 $f\left(x\right)=\left(m^2-3\right)x^{m-\frac{3}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得 $\begin{cases}m^2-3=1\\ m-\frac{3}{2}>0\end{cases}$，$\therefore m=2$. ....4 分

（2）$\because f(x)=x^{\frac{1}{2}},x\in\left[1,9\right],\therefore M=\left[1,3\right],$ 又 $\because x\in\left[1,9\right],\therefore 0\le\log_3{}^x\le 2,a\le g(x)\le 4+a,$

$\therefore N=\left[a,4+a\right]$. 因为 p 是 q 成立的充分不必要条件，所以 M 是 N 的真子集，$\therefore\begin{cases}a\le 1\\ a+4\ge 3\end{cases}$

解得 $a\in\left[-1,1\right]$. ....10 分

18．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin^2x+\cos^2x$

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

（2）求方程 $f\left(x\right)-1=0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的所有解.

解：（1）$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{3}{4}$ ....4 分

所以，函数函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ....6 分

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ （$k\in Z$）得$2k\pi-\frac{2}{3}\pi\le 2x\le 2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$

所以函数的单调递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$ ....8 分

（2）因为$f\left(x\right)-1=0$，所以$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，因为$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，

所以$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$，即$x_1=0,x_2=\frac{\pi}{3}$，所以该方程的解为$0$或$\frac{\pi}{3}$ ....12 分

19．已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+1$在$x=3$处取得极小值 1.

（1）求b,c的值；

（2）若存在$x\in[2,3]$，使得不等式$f'(x)\ge mx$成立，求实数m的取值范围.

解：(1) 因为$f'\left(x\right)=x^2+2bx+c$，依题意有$\begin{cases}f(3)=1,\\ f'(3)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3b+c+3=0,\\ 6b+c+9=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\ c=3.\end{cases}$ ......4 分

经检验，符合题意，故$b=-2$，$c=3$. ......6 分

(2) 由(1)可知，$f'(x)=x^2-4x+3$，存在$x\in[2,3]$，使得不等式$f'(x)\ge mx$成立，

即$m\le x+\frac{3}{x}-4$成立， ......8 分

令$g(x)=x+\frac{3}{x}-4$，则$g'(x)=1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^2}$，

所以当$x\in[2,3]$时，$g'(x)>0$，所以当$x\in[2,3]$时，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{\max}=g(3)=3+\frac{3}{3}-4=0$，故$m\le 0$. ......12 分

20．在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$2c\sin B=(2a-c)\tan C$.

（1）求B的大小；

（2）若$b=c$，如图，在AC边的右侧取点D，使得$AD=4,CD=2$，求ΔBAD面积的最大值.

解：（1）在ΔABC中，由正弦定理得$2bc\cos C=(2a-c)c$，化简得$2b\cos C=2a-c$，

由余弦定理得$2b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2a-c$，化简得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，由余弦定理得$\cos B=\frac{1}{2}$. ......2 分

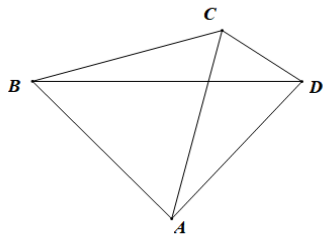
$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ......5 分

（2）$\because b=c$，由（1）可知ΔABC为正三角形，不妨设$\angle ADC=\alpha,\angle CAD=\beta$，则$AC^2=20-16\cos\alpha$

在ΔACD中，由正弦定理可得：$\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\beta}$，则$\sin\beta=\frac{2\sin\alpha}{AC}$

由余弦定理可得：

$\cos\beta=\dfrac{AC^2+16-4}{8AC}=\dfrac{AC^2+12}{8AC}=\dfrac{4-2\cos\alpha}{AC}$



$\therefore S_{\Delta BAD}=\dfrac{1}{2}\times4\times AC\times\sin(\beta+\dfrac{\pi}{3})=AC\times(\sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta)$

$=AC\times(\dfrac{2\sin\alpha}{AC}+\sqrt{3}\dfrac{4-2\cos\alpha}{AC})=2\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+4\sqrt{3}$

$=4\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})+4\sqrt{3}$

$\therefore$ **当且仅当** $\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ **时，** ΔBAD 面积取得最大值 $4+4\sqrt{3}$ ......12 分

21．已知函数 $f\left(x\right)=a^x-a^{-x}(a>0,a\neq1)$.

（1）若 $f\left(1\right)<0$，且不等式 $f(x^2-2x)+f(1-tx)<0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 t 的取值范围；

（2）若 $f\left(1\right)=\dfrac{8}{3}$，且 $g\left(x\right)=a^{2x}+a^{-2x}-4nf\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上的最小值为-14，求 n 的值.

解：（1）$\therefore f(1)<0,\therefore a-\dfrac{1}{a}<0,$ 又 $a>0,\therefore 0<a<1.$ ......1 分

$\because x\in R,$ 且 $f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$ $\therefore f(x)$ 为奇函数 ......2 分

$\because f'(x)=a^x\ln a+a^{-x}\ln a=(a^x+a^{-x})\ln a<0,$ $\therefore f(x)$ 在R 上递减 ......3 分

$\because f(x^2-2x)+f(1-tx)<0$， $\therefore f(x^2-2x)<-f(1-tx)=f(tx-1),$

$\therefore x^2-(2+t)x+1>0$,$\therefore\left(2+t\right)^2-4<0$， $\therefore -4<t<0$ ......5 分

（2）由 $f\left(1\right)=\dfrac{8}{3}$，得 $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{8}{3},\therefore 3a^2-8a-3=0,\therefore a=3$ 或 $-\dfrac{1}{3}$（舍去），......6 分

$\therefore f(x)=3^x-3^{-x},$ 同（1）可证， $f(x)$ 在R上递增，

又 $g(x)=3^{2x}+3^{-2x}-4n(3^x-3^{-x})=(3^x-3^{-x})^2-4n(3^x-3^{-x})+2,$

设 $3^x-3^{-x}=u,$ 则 $u\geq\dfrac{8}{3},y=u^2-4nu+2=(u-2n)^2+2-4n^2.$

当 $2n\geq\dfrac{8}{3}$ 时，即 $n\geq\dfrac{4}{3}$ 时， $y_{\min}=2-4n^2=-14,n=2(n=-2$ 舍去）；......9 分

当 $2n<\dfrac{8}{3}$ 时，即 $n<\dfrac{4}{3}$ 时， $y_{\min}=\dfrac{82}{9}-\dfrac{32}{3}n=-14,\therefore n=\dfrac{13}{6}>\dfrac{4}{3}$(舍去）。......11 分

综上可知： $n=2$ ⋯⋯12 分

22．已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+k(x-1)^2,k\geq 0$ 关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有两个不相等的实数解 x_1,x_2.

其中实数 a 为参数.

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）证明： $x_1+x_2>2$.

解：（1）因为 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(1+2kx^2)}{x^2}(k\geq 0)$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增； ......2 分

所以 $f(x)_{\text{极小值}}=f(1)=1$，无极大值. ......4 分

（极值各一分）

(2) 因为方程 $f(x)=a$ 有两个不相等的实数解 x_1,x_2，

所以结合(1)不妨设 $f(x_1)=f(x_2),0<x_1<1<x_2$.

令 $F(x)=f(x)-f(2-x)$，则 $F'(x)=\left[f(x)-f(2-x)\right]'=f'(x)+f'(2-x)$，

因为 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(1+2kx^2)}{x^2}$，

所以 $F'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\dfrac{(x-1)(1+2kx^2)}{x^2}+\dfrac{(2-x-1)\left[1+2k(2-x)^2\right]}{(2-x)^2}$，

即 $F'(x)=-\dfrac{4(x-1)^2}{(x^2-2x)^2}$， ......6 分

所以当 $x<1$ 时， $F'(x)<0$， $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减.

因为 $F(1)=f(1)-f(2-1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时， $F(x)>F(1)=0$，即 $f(x)>f(2-x)$.......8 分

因为 $0<x_1<1$，所以 $f(x_1)>f(2-x_1)$.

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_1)$，......10 分

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增， $x_2>1,2-x_1>1$，

所以 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$. ......12 分