**2024-2025学年第一学期高二数学天天练41**

已知椭圆$C$：$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，短轴长为$2$．
$(1)$求椭圆$C$的标准方程；
$(2)$过点$P(1,0)$的直线$l$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点$.$若$△ABO$的面积为$\frac{3}{5}(O$为坐标原点$)$，求直线$l$的方程．

**天天练41参考答案**

【答案】解：$(1)$由题意可得$\left\{\begin{matrix}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}\\2b=2\\c^{2}=a^{2}−b^{2}\end{matrix}\right.$，解得$a^{2}=4$，$b^{2}=1$．故椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$．
$(2)$由题意可知直线$l$的斜率不为$0$，则设直线$l$的方程为$x=my+1$，$A(x\_{1},y\_{1})$，$B(x\_{2},y\_{2}).$
联立$\left\{\begin{matrix}x=my+1\\\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1\end{matrix}\right.$，整理得$(m^{2}+4)y^{2}+2my−3=0$，
$△=(2m)^{2}−4(m^{2}+4)×(−3)=16m^{2}+48>0$，
则$y\_{1}+y\_{2}=−\frac{2m}{m^{2}+4}$，$y\_{1}y\_{2}=−\frac{3}{m^{2}+4}$．
故$|y\_{1}−y\_{2}|=\sqrt[ ]{(y\_{1}+y\_{2})^{2}−4y\_{1}y\_{2}}=\sqrt[ ]{(−\frac{2m}{m^{2}+4})^{2}+\frac{12}{m^{2}+4}}=\frac{4\sqrt[ ]{m^{2}+3}}{m^{2}+4}$．
因为$△ABO$的面积为$\frac{3}{5}$，
所以$\frac{1}{2}|OP||y\_{1}−y\_{2}|=\frac{1}{2}×1×\frac{4\sqrt[ ]{m^{2}+3}}{m^{2}+4}=\frac{2\sqrt[ ]{m^{2}+3}}{m^{2}+4}=\frac{3}{5}$，
设$t=\sqrt[ ]{m^{2}+3}\geq \sqrt[ ]{3}$，则$\frac{2t}{t^{2}+1}=\frac{3}{5}$，整理得$(3t−1)(t−3)=0$，解得$t=3$，即$m=\pm \sqrt[ ]{6}$．
故直线$l$的方程为$x=\pm \sqrt[ ]{6}y+1$，即$x\pm \sqrt[ ]{6}y−1=0$．

【解析】本题考查椭圆的简单性质的应用，椭圆方程的求法，直线与椭圆的位置关系的综合应用，是中档题．
$(1)$利用椭圆的离心率以及短轴长，转化求解$a$，即可得到椭圆方程．
$(2)$设直线$l$的方程为$x=my+1$，$A(x\_{1},y\_{1})$，$B(x\_{2},y\_{2}).$联立直线与椭圆方程，整理得$(m^{2}+4)y^{2}+2my−3=0$，$△=(2m)^{2}−4(m^{2}+4)×(−3)=16m^{2}+48>0$，利用韦达定理，弦长公式，求解三角形的面积，然后求解即可．

$$ $$

**2024-2025学年第一学期高二数学天天练42**

已知$F$是抛物线$C:y^{2}=2px(p>0)$的焦点，$A$是$C$上在第一象限的一点，点$B$在$y$轴上，$AB⊥y$轴，$\left|AB\right|=2$，$\left|AF\right|=3$．

$(1)$求$C$的方程；

$(2)$过$F$作斜率为$k$的直线与$C$交于$M$，$N$两点，$▵MON$的面积为$\sqrt[ ]{5}(O$为坐标原点$)$，求直线$MN$的方程．

**天天练42参考答案**

【答案】解：$(1)$由题知，$x\_{A}=2$，由抛物线的定义知，$\left|AF\right|=x\_{A}+\frac{p}{2}=2+\frac{p}{2}=3$，

$∴p=2$，$∴C$的方程为$y^{2}=4x$．

$(2)$由$(1)$知$F(1,0)$，设$M\left(x\_{1},y\_{1}\right)$，$N\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，直线$MN$的方程为$y=k(x−1)$，
代入$y^{2}=4x$，整理得$k^{2}x^{2}−\left(2k^{2}+4\right)x+k^{2}=0$，

由题易知$k\ne 0$，$∴x\_{1}+x\_{2}=\frac{2k^{2}+4}{k^{2}}$，$x\_{1}x\_{2}=1$，

$∴|MN|=\sqrt[ ]{1+k^{2}}|x\_{1}−x\_{2}|=\sqrt[ ]{(1+k^{2})[(x\_{1}+x\_{2})^{2}−4x\_{1}x\_{2}]}=\sqrt[ ]{(1+k^{2})[(\frac{2k^{2}+4}{k^{2}})^{2}−4×1]}=\frac{4(1+k^{2})}{k^{2}}$，

$∵O$到直线$MN$的距离为$d=\frac{\left|k\right|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}$，

$∴S\_{▵MON}=\frac{1}{2}\left|MN\right|⋅d=\frac{1}{2}×\frac{4\left(1+k^{2}\right)}{k^{2}}×\frac{\left|k\right|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}=\frac{2\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{\left|k\right|}=\sqrt[ ]{5}$，解得$k=\pm 2$，

$∴$直线$MN$的方程为$y=2x−2$或$y=−2x+2$．

【解析】本题主要考查抛物线中的面积问题，抛物线的标准方程，属于中档题．
$(1)$根据抛物线的定义即可求解；

$(2)$设直线$MN$的方程为$y=k(x−1)$，代入抛物线方程，利用弦长公式计算出$\left|MN\right|$，再根据点到直线的距离公式计算出点$O$到直线$MN$的距离，根据面积公式建立等式计算即可求解．

**2024-2025学年第一学期高二数学天天练43**

已知抛物线$y^{2}=2px(p>0)$上有一点$P(2,−4)$．

$(1)$求抛物线的标准方程；

$(2)$已知直线$l:y=x+b(b>0)$与抛物线交于$A,B$两点，$F$是抛物线的焦点，且$\vec{FA}⋅\vec{FB}=1$，求$▵ABF$的面积．

**天天练43参考答案**

【答案】解：$(1)∵$点$P(2,−4)$在抛物线$y^{2}=2px\left(p>0\right)$上，$∴(−4)^{2}=2p×2$，

$∴p=4$，$∴$抛物线的标准方程为$y^{2}=8x$．

$(2)$设点$A\left(x\_{1},y\_{1}\right),B\left(x\_{2},y\_{2}\right)$．联立$\left\{\begin{matrix}y=x+b,\\y^{2}=8x,\end{matrix}\right.$消去$x$并整理得$y^{2}−8y+8b=0$．

由$Δ>0$得$64−32b>0$，$∴b<2$，$∴y\_{1}+y\_{2}=8,y\_{1}y\_{2}=8b$，

$∴x\_{1}+x\_{2}=8−2b,x\_{1}x\_{2}=b^{2}$．又$\vec{FA}⋅\vec{FB}=1$，

$∴\left(x\_{1}−2\right)\left(x\_{2}−2\right)+y\_{1}y\_{2}=1$，$∴x\_{1}x\_{2}−2\left(x\_{1}+x\_{2}\right)+4+y\_{1}y\_{2}=b^{2}−2×(8−2b)+4+8b=1$，

即$b^{2}+12b−13=0$，解得$b=1$或$b=−13($舍$)$，

$∴|AB|=\sqrt[ ]{\left(1+k^{2}\right)\left[\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}−4x\_{1}x\_{2}\right]}=\sqrt[ ]{\left(1+1^{2}\right)×\left(6^{2}−4×1\right)}=8$．

点$F\left(2,0\right)$到直线$AB$的距离$d=\frac{|2+1|}{\sqrt[ ]{2}}=\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2}$，

$∴S\_{▵ABF}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}×\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2}×8=6\sqrt[ ]{2}$．

【解析】本题考查抛物线方程，抛物线中的面积问题，属于一般题．
$(1)$将点代入抛物线方程，计算可求$p$值，从而写出抛物线方程；
$(2)$联立直线和抛物线，结合$\vec{FA}⋅\vec{FB}=1$和韦达定理求出$b$值，再计算弦长$\left|AB\right|$和点$F$到直线的距离，从而求出三角形面积．

**2024-2025学年第一学期高二数学天天练44**

已知双曲线$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F$，左顶点为$M$，虚轴的上端点为$P$，且$|PF|=\sqrt[ ]{6}$，$|PM|=\sqrt[ ]{5}$．

$($Ⅰ$)$求$C$的方程$;$

$($Ⅱ$)$若直线$l$的斜率是$C$的斜率为正的渐近线的斜率的$2$倍，且$l$与$C$交于$A$，$B$两点，直线$PA$，$PB$的斜率之和为$\frac{10}{17}$，求$l$的方程．

**天天练44参考答案**

【答案】解：$($Ⅰ$)$设$C$的半焦距为$c(c>0)$．因为$|PF|=\sqrt[ ]{6}$，$|PM|=\sqrt[ ]{5}$，
所以$\sqrt[ ]{b^{2}+c^{2}}=\sqrt[ ]{6}$，$\sqrt[ ]{b^{2}+a^{2}}=c=\sqrt[ ]{5}$，解得$b=1$，$c=\sqrt[ ]{5}$，所以$a^{2}=c^{2}−b^{2}=5−1=4$，
所以$C$的方程为$\frac{x^{2}}{4}−y^{2}=1;$
$($Ⅱ$)$易知$P(0,1)$，因为$C$的斜率为正的渐近线的斜率为$\frac{1}{2}$，所以$l$的斜率为$1$，故设$l:y=x+t$，
设$A(x\_{1},y\_{1})$，$B(x\_{2},y\_{2})$，联立$\left\{\begin{matrix}y=x+t\\\frac{x^{2}}{4}−y^{2}=1\end{matrix}\right.$，消去$y$，整理得$3x^{2}+8tx+4t^{2}+4=0$，
则$Δ=64t^{2}−4×3×(4t^{2}+4)>0$，得$t^{2}>3$，即$t>\sqrt[ ]{3}$或$t<−\sqrt[ ]{3}$，
$x\_{1}+x\_{2}=−\frac{8}{3}t$，$x\_{1}x\_{2}=\frac{4t^{2}+4}{3}$，
所以$k\_{PA}+k\_{PB}=\frac{y\_{1}−1}{x\_{1}}+\frac{y\_{2}−1}{x\_{2}}=\frac{x\_{1}+t−1}{x\_{1}}+\frac{x\_{2}+t−1}{x\_{2}}=\frac{2x\_{1}x\_{2}+(t−1)(x\_{1}+x\_{2})}{x\_{1}x\_{2}}=2+\frac{(t−1)×(−\frac{8}{3}t)}{\frac{4t^{2}+4}{3}}=\frac{10}{17}$，
整理得$(5t+3)(t−4)=0$，解得$t=−\frac{3}{5}($舍去$)$或$t=4$，所以直线$l$的方程为$y=x+4$，即$x−y+4=0$．

【解析】本题考查双曲线的标准方程，直线与双曲线的位置关系及其应用，属于中档题．
$(1)$根据题意得到$a$，$b$，$c$的值，即可得到答案；
$(2)$设出直线$l$的方程，与双曲线联立，表示出$PA$，$PB$的斜率之和，结合根与系数得关系即可求解．

**2024-2025学年第一学期高二数学天天练45**

在平面直角坐标系$xOy$中，已知双曲线$C:2x^{2}−y^{2}=1$．

$(1)$设$F$是$C$的左焦点，$M$是$C$右支上一点，若$\left|MF\right|=2\sqrt[ ]{2}$，求点$M$的坐标；

$(2)$设斜率为$k\left(\left|k\right|<\sqrt[ ]{2}\right)$的直线$l$交$C$于$P$、$Q$两点，若$l$与圆$x^{2}+y^{2}=1$相切，求证：$OP⊥OQ$．

**天天练45参考答案**

【答案】解：$(1)$由双曲线$C:2x^{2}−y^{2}=1$，可得$C:\frac{x^{2}}{\frac{1}{2}}−y^{2}=1$，$a=\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},b=1,c=\frac{\sqrt[ ]{6}}{2}$，

$∴F\left(−\frac{\sqrt[ ]{6}}{2},0\right)$，设$M\left(x,y\right)$，则$2x^{2}−y^{2}=1$，$∴\left|MF\right|=2\sqrt[ ]{2}=\sqrt[ ]{\left(x+\frac{\sqrt[ ]{6}}{2}\right)^{2}+y^{2}}$，

$∴\sqrt[ ]{\left(x+\frac{\sqrt[ ]{6}}{2}\right)^{2}+2x^{2}−1}=\sqrt[ ]{\left(\sqrt[ ]{3}x+\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}\right)^{2}}=\left|\sqrt[ ]{3}x+\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}\right|=2\sqrt[ ]{2}$，

又$M$是$C$右支上一点，故$x\geq \frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$，$∴x=\frac{\sqrt[ ]{6}}{2},y=\pm \sqrt[ ]{2}$，即$M\left(\frac{\sqrt[ ]{6}}{2},\pm \sqrt[ ]{2}\right)$．

$(2)$设直线$PQ$的方程为$y=kx+m$，因直线$PQ$与已知圆相切，故$\frac{|m|}{\sqrt[ ]{k^{2}+1}}=1$，即$m^{2}=k^{2}+1$

由$\left\{\begin{matrix}y=kx+m,\\2x^{2}−y^{2}=1,\end{matrix}\right.$，得$(2−k^{2})x^{2}−2kmx−m^{2}−1=0$，设$P\left(x\_{1},y\_{1}\right)$、$Q\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，则$\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}=\frac{2km}{2−k^{2}}\\x\_{1}x\_{2}=\frac{−1−m^{2}}{2−k^{2}}\end{matrix}\right.,$

又$y\_{1}y\_{2}=(kx\_{1}+m)(kx\_{2}+m)$

所以$\vec{OP}⋅\vec{OQ}=x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}=(1+k^{2})x\_{1}x\_{2}+km(x\_{1}+x\_{2})+m^{2}$

$$=(1+k^{2})⋅(\frac{−1−m^{2}}{2−k^{2}})+km⋅(\frac{2km}{2−k^{2}})+m^{2}=\frac{−1+m^{2}−k^{2}}{2−k^{2}}=0$$

所以$OP⊥OQ$．

【解析】本题考查直线与双曲线的位置关系及其应用，点到直线的距离公式，属于中档题．
$(1)$由题可得$F\left(−\frac{\sqrt[ ]{6}}{2},0\right)$，根据两点间距离公式及条件即得；

$(2)$设直线$PQ$的方程为$y=kx+m$，根据直线与圆的位置关系可得$m^{2}=k^{2}+1$，直线方程与双曲线方程联立，利用根与系数之间的关系结合向量的数量积，计算即可．