**2024-2025学年第一学期高二数学周练11**

**一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1、等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，若$S\_{5}=S\_{10}$，$a\_{5}=1$，则$a\_{1}=$(     )

A. $−2$ B. $\frac{7}{3}$ C. $1$ D. $2$

2、已知等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的公差为$2$，若$a\_{1},a\_{3},a\_{4}$成等比数列，$S\_{n}$是$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和，则$S\_{9}$等于(     )

A. $−8$ B. $−6$ C. $10$ D. $0$

3、已知数列$\left\{\begin{matrix}a\_{n}\end{matrix}\right\}$的通项公式为$a\_{n}=−2n^{2}+λn\left(n\in N^{∗},λ\in R\right)$，若$\left\{\begin{matrix}a\_{n}\end{matrix}\right\}$是递减数列，则$λ$的取值范围为(     )

A. $\left[\frac{8}{3},+\infty \right)$ B. $\left(−\infty ,4\right]$ C. $\left(−\infty ,6\right)$ D. $\left[4,6\right)$

4、数列$\left\{a\_{n}\right\}$满足$a\_{n+1}=1−\frac{1}{a\_{n}}(n\in N^{∗})$，且$a\_{1}=2$，则$a\_{2022}$的值为(     )

A. $2$ B. $1$ C. $\frac{1}{2}$ D. $−1$

5、已知公差为$d$的等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，且$S\_{20}<0$，$S\_{21}>0$，则$\frac{a\_{4}}{d}$的取值范围是(     )

A. $\left(−\frac{1}{6},−\frac{1}{7}\right)$ B. $\left(−\frac{2}{13},−\frac{1}{7}\right)$ C. $(−7,−6)$ D. $\left(−7,−\frac{13}{2}\right)$

6、如表所示的数阵称为“森德拉姆素数筛”，表中每行每列的数都成等差数列，设$f(m,n)$表示该数阵中第$m$行、第$n$列的数，则下列说法正确的是(     )

A. $f(3 , 18)<49$ B. $f(6 , 8)>49$

C. $f(12 , 4)=49$ D. $f(7 , 7)=49$

7、已知等比数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，若$S\_{4}=−5$，$S\_{6}=3S\_{2}$，则$S\_{8}=$(     )

A. $−10$ B. $25$ C. $−10$或$−25$ D. $−10$或$0$

8、已知$F\_{1}(−c,0)$，$F\_{2}(c,0)$是椭圆$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的左、右焦点，若椭圆$C$上存在一点$P$使得$\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}=c^{2}$，则椭圆$C$的离心率$e$的取值范围为(     )

A. $(\frac{\sqrt[ ]{3}}{3},\frac{\sqrt[ ]{5}}{3}]$ B. $[\frac{\sqrt[ ]{3}}{3},\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}]$ C. $[\sqrt[ ]{3}−1,\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}]$ D. $[\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},1)$

**二、多选题：本题共3小题，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。**

9、已知$S\_{n}$是等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和，$a\_{1}<0$，且$S\_{19}=S\_{13}$，则(     )

A. 公差$d>0$ B. $a\_{16}=0$
C. $S\_{33}=0$ D. $n=16$时，$S\_{n}$最小

10、已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$满足$a\_{1}=\frac{1}{2},2a\_{n+1}−a\_{n}a\_{n+1}−a\_{n}=0$，则(     )

A. $\left\{\frac{1}{a\_{n}}−1\right\}$是等比数列 B. $\left\{a\_{n}\right\}$是单调递减数列
C. $a\_{5}=\frac{1}{16}$ D. 数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}=2^{n}+n−1$

11、设椭圆$C:\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$的左右焦点为$F\_{1}$，$F\_{2}$，$P$是$C$上的动点，则下列结论正确的是(     )

A. 离心率$e=\frac{\sqrt[ ]{6}}{2}$

B. $\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}$的最小值为$0$
C. $△PF\_{1}F\_{2}$面积的最大值为$\sqrt[ ]{2}$

D. 以线段$F\_{1}F\_{2}$为直径的圆与直线$x+y−\sqrt[ ]{2}=0$相切

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。**

12、已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}=n^{2}+n+1$，当$\frac{S\_{n}+24}{a\_{n}}$取最小值时，$n=$           ．

13、抛物线$y^{2}=2px$的焦点为$F$，点$A(1,4)$和点$B$，$C$在抛物线上，且$\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=\vec{0}$，则过点$B$，$C$的直线方程为           ．

14、剪纸，又叫刻纸，是一种镂空艺术，是中国古老的民间艺术之一，已知某剪纸的裁剪工艺如下：取一张半径为$2$的圆形纸片，记为$⊙O$，在$⊙O$内作内接正方形，接着在该正方形内作内切圆，记为$⊙O\_{1}$，并裁剪去该正方形内多余的部分$($如图所示阴影部分$)$，记为一次裁剪操作，$……$重复上述裁剪操作$4$次，最终得到该剪纸．则第$4$次裁剪操作结束后，所有裁剪操作中裁剪去除的面积之和为           ．

**四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。**

15.（本小题13分）

设$S\_{n}$为等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和，$S\_{7}=49$，$a\_{2}+a\_{8}=18$．

$(1)$求数列$\{a\_{n}\}$的通项公式．

$(2)$若$S\_{3}$、$a\_{17}$、$S\_{m}$成等比数列，求$S\_{3m}$．

1. （本小题15分）

已知数列$\{a\_{n}\}$满足$\frac{n}{a\_{n+1}}=\frac{n+1}{a\_{n}}+4n^{2}+4n$，$n\in N^{∗}$．

$(1)$证明：数列$\{\frac{1}{na\_{n}}\}$是等差数列$;$

$(2)$若$a\_{1}=\frac{1}{8}$，$b\_{n}=(2n+1)^{2}a\_{n}$，求$\{b\_{n}\}$的通项公式．

17．（本小题15分）

已知等差数列$\{a\_{n}\}$的公差为整数，$a\_{3}=9$，设其前$n$项和为$S\_{n}$，且$\{\frac{S\_{n}}{a\_{n}+1}\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列．

$(1)$求$\{a\_{n}\}$的通项公式$;$

$(2)$若$b\_{n}=a\_{2n−1}−80$，求数列$\{|b\_{n}|\}$的前$n$项和$T\_{n}$．

18. （本小题17分）

已知双曲线$C$的中心为坐标原点，右焦点为$(\sqrt[ ]{7},0)$，且过点$(−4,3)$．

$(1)$求双曲线$C$的标准方程$;$

$(2)$已知点$A(4,1)$，过点$(1,0)$的直线与双曲线$C$的左、右两支分别交于点$M$，$N$，直线$AN$与双曲线$C$交于另一点$P$，设直线$AM$，$AN$的斜率分别为$k\_{1}$，$k\_{2}$．

(ⅰ)求证：$k\_{1}+k\_{2}$为定值$;$

(ⅱ)求证：直线$MP$过定点，并求出该定点的坐标．

19. （本小题17分）

已知在平面直角坐标系$xOy$中，椭圆$G$的中心在坐标原点$O$，焦点在$x$轴上，焦距等于$2\sqrt[ ]{6}$，离心率为$\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$

$(1)$求椭圆$G$的标准方程$;$

$(2)$若直线$y=\frac{1}{2}x+m(m\ne 0)$与椭圆$G$交于$M$、$N$两点，求证：$|OM|^{2}+|ON|^{2}$为定值$;$

$(3)$记$B$为椭圆上顶点，过点$B$作相互垂直的两条直线$BP$，$BQ$分别与椭圆$G$相交于$P$，$Q$两点$.$设直线$BP$的斜率为$k$且$k>0$，若$|BP|=|BQ|$，求$k$的值．

**2024-2025学年第一学期高二数学周练11答案**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，若$S\_{5}=S\_{10}$，$a\_{5}=1$，则$a\_{1}=$(    )

A. $−2$ B. $\frac{7}{3}$ C. $1$ D. $2$

【答案】*B*

2、已知等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的公差为$2$，若$a\_{1},a\_{3},a\_{4}$成等比数列，$S\_{n}$是$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和，则$S\_{9}$等于(    )

A. $−8$ B. $−6$ C. $10$ D. $0$

【答案】*D*

3、已知数列$\left\{\begin{matrix}a\_{n}\end{matrix}\right\}$的通项公式为$a\_{n}=−2n^{2}+λn\left(n\in N^{∗},λ\in R\right)$，若$\left\{\begin{matrix}a\_{n}\end{matrix}\right\}$是递减数列，则$λ$的取值范围为(    )

A. $\left[\frac{8}{3},+\infty \right)$ B. $\left(−\infty ,4\right]$ C. $\left(−\infty ,6\right)$ D. $\left[4,6\right)$

【答案】*C*

4、数列$\left\{a\_{n}\right\}$满足$a\_{n+1}=1−\frac{1}{a\_{n}}(n\in N^{∗})$，且$a\_{1}=2$，则$a\_{2022}$的值为(    )

A. $2$ B. $1$ C. $\frac{1}{2}$ D. $−1$

【答案】*D*

5、已知公差为$d$的等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，且$S\_{20}<0$，$S\_{21}>0$，则$\frac{a\_{4}}{d}$的取值范围是(    )

A. $\left(−\frac{1}{6},−\frac{1}{7}\right)$ B. $\left(−\frac{2}{13},−\frac{1}{7}\right)$ C. $(−7,−6)$ D. $\left(−7,−\frac{13}{2}\right)$

【答案】*D*

6、如表所示的数阵称为“森德拉姆素数筛”，表中每行每列的数都成等差数列，设$f(m,n)$表示该数阵中第$m$行、第$n$列的数，则下列说法正确的是(    )

A. $f(3 , 18)<49$ B. $f(6 , 8)>49$

C. $f(12 , 4)=49$ D. $f(7 , 7)=49$

【答案】*C*

7、已知等比数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，若$S\_{4}=−5$，$S\_{6}=3S\_{2}$，则$S\_{8}=$(    )

A. $−10$ B. $25$ C. $−10$或$−25$ D. $−10$或$0$

【答案】*A*

8、已知$F\_{1}(−c,0)$，$F\_{2}(c,0)$是椭圆$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的左、右焦点，若椭圆$C$上存在一点$P$使得$\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}=c^{2}$，则椭圆$C$的离心率$e$的取值范围为(    )

A. $(\frac{\sqrt[ ]{3}}{3},\frac{\sqrt[ ]{5}}{3}]$ B. $[\frac{\sqrt[ ]{3}}{3},\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}]$ C. $[\sqrt[ ]{3}−1,\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}]$ D. $[\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},1)$

【答案】*B*

【解答】
解：设$P\left(x\_{0},y\_{0}\right)$，则$\frac{x\_{0}^{2}}{a^{2}}+\frac{y\_{0}^{2}}{b^{2}}=1 (a>b>0)$，$∴y\_{0}^{2}=b^{2}\left(1−\frac{x\_{0}^{2}}{a^{2}}\right)$，
由$\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}=c^{2}$，$∴\left(−c−x\_{0},−y\_{0}\right)⋅\left(c−x\_{0},−y\_{0}\right)=c^{2}$，
化为$x\_{0}^{2}−c^{2}+y\_{0}^{2}=c^{2}$，$∴x\_{0}^{2}+b^{2}\left(1−\frac{x\_{0}^{2}}{a^{2}}\right)=2c^{2}$，整理得$x\_{0}^{2}=\frac{a^{2}}{c^{2}}\left(3c^{2}−a^{2}\right)$，
$∵0\leq x\_{0}^{2}\leq a^{2}$，$∴0\leq \frac{a^{2}}{c^{2}}\left(3c^{2}−a^{2}\right)\leq a^{2}$，解得$\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}\leq e\leq \frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$，
故选*B*．

二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9、已知$S\_{n}$是等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和，$a\_{1}<0$，且$S\_{19}=S\_{13}$，则(    )

A. 公差$d>0$ B. $a\_{16}=0$
C. $S\_{33}=0$ D. $n=16$时，$S\_{n}$最小

【答案】*AD*

10、已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$满足$a\_{1}=\frac{1}{2},2a\_{n+1}−a\_{n}a\_{n+1}−a\_{n}=0$，则(    )

A. $\left\{\frac{1}{a\_{n}}−1\right\}$是等比数列
B. $\left\{a\_{n}\right\}$是单调递减数列
C. $a\_{5}=\frac{1}{16}$
D. 数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}=2^{n}+n−1$

【答案】*ABD*
解：由 $2a\_{n+1}−a\_{n}a\_{n+1}−a\_{n}=0$ ，得 $a\_{n}\left(1−a\_{n+1}\right)=2a\_{n+1}$ ．

首先证明：数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 中， $∀n\in N^{∗},a\_{n}\ne 0$ ．

证明：假设 $a\_{n+1}=0$ ，代入上式得， $a\_{n}=2a\_{n+1}=0$ ，
这与已知 $a\_{1}=\frac{1}{2}$ 矛盾，故 $a\_{n+1}\ne 0$ ，又 $a\_{1}\ne 0$ ，

故数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 中， $∀n\in N^{∗},a\_{n}\ne 0$ ，由以上证明知， $a\_{n}a\_{n+1}\ne 0$ ．

$A$选项，由题意 $a\_{n}=2a\_{n+1}−a\_{n}a\_{n+1}$ ，两边同除以 $a\_{n}a\_{n+1}$ 得 $\frac{1}{a\_{n+1}}=\frac{2}{a\_{n}}−1$ ，所以 $\frac{1}{a\_{n+1}}−1=2\left(\frac{1}{a\_{n}}−1\right)$ ，且 $\frac{1}{a\_{1}}−1=1\ne 0$ ，所以 $\left\{\frac{1}{a\_{n}}−1\right\}$ 是以 $1$ 为首项， $2$ 为公比的等比数列，故*A*正确；

$B$选项，由等比数列通项公式可知 $\frac{1}{a\_{n}}−1=2^{n−1}$ ，

所以 $a\_{n}=\frac{1}{2^{n−1}+1}$ ，由通项可知， $\left\{a\_{n}\right\}$ 是单调递减数列，故*B*正确；

$C$选项， $a\_{5}==\frac{1}{2^{4}+1}=\frac{1}{17}$ ，*C*错误；

$D$选项，令 $b\_{n}=\frac{1}{a\_{n}}$ ，则 $b\_{n}=2^{n−1}+1$ ，所以 $S\_{n}=\frac{1−2^{n}}{1−2}+n=2^{n}+n−1$ ，*D*正确．

故选*ABD*．

11、设椭圆$C:\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$的左右焦点为$F\_{1}$，$F\_{2}$，$P$是$C$上的动点，则下列结论正确的是(    )

A. 离心率$e=\frac{\sqrt[ ]{6}}{2}$
B. $\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}$的最小值为$0$
C. $△PF\_{1}F\_{2}$面积的最大值为$\sqrt[ ]{2}$
D. 以线段$F\_{1}F\_{2}$为直径的圆与直线$x+y−\sqrt[ ]{2}=0$相切

【答案】*BD*

解：依题意$a=\sqrt[​]{2},b=1,c=1$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt[​]{2}}=\frac{\sqrt[​]{2}}{2}$，故*A*错误；
设$P(x,y)$，则$\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1,x\in \left[−\sqrt[ ]{2},\sqrt[ ]{2}\right]$，
又$F\_{1}\left(−1,0\right),F\_{2}\left(1,0\right)$，所以$\vec{PF\_{1}}⋅\vec{PF\_{2}}=x^{2}+y^{2}−1=\frac{x^{2}}{2}⩾0$，故*B*正确；

对于$C$选项，$\left|F\_{1}F\_{2}\right|=2c=2$，当$P$为椭圆短轴顶点时，
$△PF\_{1}F\_{2}$的面积取得最大值为$\frac{1}{2}⋅2c⋅b=c⋅b=1$，故*C*错误；

对于$D$选项，线段$F\_{1}F\_{2}$为直径的圆圆心为$\left(0,0\right)$，半径为$c=1$，
圆心到直线$x+y−\sqrt[​]{2}=0$的距离为$\frac{\sqrt[​]{2}}{\sqrt[​]{2}}=1$，也即圆心到直线的距离等于半径，
所以以线段$F\_{1}F\_{2}$为直径的圆与直线$x+y−\sqrt[​]{2}=0$相切，所以$D$选项正确．
故选*BD*．

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12、已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}=n^{2}+n+1$，当$\frac{S\_{n}+24}{a\_{n}}$取最小值时，$n=$           ．

【答案】$5$

解：数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}=n^{2}+n+1$，$a\_{1}=S\_{1}=3$，则$\frac{S\_{1}+24}{a\_{1}}=9$，

当$n\geq 2$时，$a\_{n}=S\_{n}−S\_{n−1}=n^{2}+n−(n−1)^{2}−(n−1)=2n$，

$\frac{S\_{n}+24}{a\_{n}}=\frac{n^{2}+n+25}{2n}=\frac{1}{2}(n+\frac{25}{n})+\frac{1}{2}⩾5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$，
当且仅当$n=\frac{25}{n}$，即$n=5$时取等号，又$9>\frac{11}{2}$，

所以当$\frac{S\_{n}+24}{a\_{n}}$取最小值时，$n=5$．

故答案为：$5$．

13、抛物线$y^{2}=2px$的焦点为$F$，点$A(1,4)$和点$B$，$C$在抛物线上，且$\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=\vec{0}$，则过点$B$，$C$的直线方程为          ．

【答案】$4x+y−20=0$
解：由点$A(1,4)$在抛物线上，得$16=2p$，解得$p=8$，
则抛物线方程为$y^{2}=16x$，$F(4,0)$，设点$B$，$C$坐标分别为$(x\_{1},y\_{1})$，$(x\_{2},y\_{2})$，
由于$\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=\vec{0}$，则$\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}−11=0\\y\_{1}+y\_{2}+4=0\end{matrix}\right.$，故*BC*的中点坐标为$(\frac{11}{2},−2).$
过点$B$，$C$的直线的斜率为$k=\frac{y\_{1}−y\_{2}}{x\_{1}−x\_{2}}=\frac{y\_{1}−y\_{2}}{\frac{y\_{1}^{2}}{16}−\frac{y\_{2}^{2}}{16}}=\frac{16}{y\_{1}+y\_{2}}=−4$，
则过点$B$，$C$的直线方程为$y+2=−4(x−\frac{11}{2})$，即$4x+y−20=0$．
故答案为：$4x+y−20=0$．

14、剪纸，又叫刻纸，是一种镂空艺术，是中国古老的民间艺术之一，已知某剪纸的裁剪工艺如下：取一张半径为$2$的圆形纸片，记为$⊙O$，在$⊙O$内作内接正方形，接着在该正方形内作内切圆，记为$⊙O\_{1}$，并裁剪去该正方形内多余的部分$($如图所示阴影部分$)$，记为一次裁剪操作，$……$重复上述裁剪操作$4$次，最终得到该剪纸．则第$4$次裁剪操作结束后，所有裁剪操作中裁剪去除的面积之和为          ．

【答案】$15−\frac{15π}{4}$
解：第$i$次剪去正方形内多余部分的面积记为$S\_{i}$；

$⊙O$的半径为$2$，
由其内接正方形对角线为直径，
所以内接正方形的边长为$2\sqrt[ ]{2}$，即$a\_{1}=2\sqrt[ ]{2}$，
再作第一个内切圆$⊙O\_{1}$，其直径为该正方形的边长，即$R\_{1}=\sqrt[ ]{2}$，

所以第一次剪去部分的面积为$S\_{1}=\left(2\sqrt[ ]{2}\right)^{2}−π\left(\sqrt[ ]{2}\right)^{2}=8−2π$，

同理：$a\_{2}=\sqrt[ ]{2}R\_{1}=2$，$R\_{2}=\frac{a\_{2}}{2}=1$，$S\_{2}=2^{2}−π×1^{2}=4−π$，

$a\_{3}=\sqrt[ ]{2}R\_{2}=\sqrt[ ]{2}$，$R\_{3}=\frac{a\_{3}}{2}=\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$，$S\_{3}=\left(\sqrt[ ]{2}\right)^{2}−π\left(\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}\right)^{2}=2−\frac{π}{2}$，

$a\_{4}=\sqrt[ ]{2}R\_{3}=1$，$R\_{4}=\frac{a\_{4}}{2}=\frac{1}{2}$，$S\_{4}=1^{2}−π\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=1−\frac{π}{4}$，

所以前四次裁剪操作中裁剪去除部分的面积之和为：$S\_{1}+S\_{2}+S\_{3}+S\_{4}=8−2π+4−π+2−\frac{π}{2}+1−\frac{π}{4}=15−\frac{15π}{4}$．故答案为：$15−\frac{15π}{4}$．

四、解答题：本题共**5**小题，共**77**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题13分）

设$S\_{n}$为等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和，$S\_{7}=49$，$a\_{2}+a\_{8}=18$．

$(1)$求数列$\{a\_{n}\}$的通项公式．

$(2)$若$S\_{3}$、$a\_{17}$、$S\_{m}$成等比数列，求$S\_{3m}$．

【答案】解：$(1)$设等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的公差为$d$，

$∵S\_{n}$为等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和，$S\_{7}=49$，$a\_{2}+a\_{8}=18$．

$∴\left\{\begin{matrix}S\_{7}=\frac{7\left(a\_{1}+a\_{7}\right)}{2}=\frac{7\left(a\_{1}+a\_{1}+6d\right)}{2}=7a\_{4}=49\\a\_{2}+a\_{8}=a\_{5}−3d+a\_{5}+3d=2a\_{5}=18\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}a\_{4}=7\\a\_{5}=9\end{matrix}\right.$，解得$d=2$，

$∴a\_{n}=a\_{4}+(n−4)d=2n−1.$

$(2)$由$(1)$知，$a\_{1}=1$，$S\_{n}=\frac{n\left(1+2n−1\right)}{2}=n^{2}.$

$∵S\_{3}$、$a\_{17}$、$S\_{m}$成等比数列，则$\frac{a\_{17}}{S\_{3}}=\frac{S\_{m}}{a\_{17}}$，$∴S\_{3}S\_{m}=a\_{17}^{2}$，   即$9m^{2}=33^{2}$，解得$m=11$，
因此，$S\_{3m}=33^{2}=1089.$

1. （本小题15分）

已知数列$\{a\_{n}\}$满足$\frac{n}{a\_{n+1}}=\frac{n+1}{a\_{n}}+4n^{2}+4n$，$n\in N^{∗}$．

$(1)$证明：数列$\{\frac{1}{na\_{n}}\}$是等差数列$;$

$(2)$若$a\_{1}=\frac{1}{8}$，$b\_{n}=(2n+1)^{2}a\_{n}$，求$\{b\_{n}\}$的通项公式．

【答案】$(1)$证明：因为$\frac{n}{a\_{n+1}}=\frac{n+1}{a\_{n}}+4n^{2}+4n$，
所以$\frac{n}{a\_{n+1}}=\frac{n+1}{a\_{n}}+4n(n+1)$，
两边同时除以$n(n+1)$得$\frac{1}{(n+1)a\_{n+1}}=\frac{1}{na\_{n}}+4$，
即$\frac{1}{(n+1)a\_{n+1}}−\frac{1}{na\_{n}}=4$，
所以数列$\{\frac{1}{na\_{n}}\}$是公差为$4$的等差数列．
$(2)$解：由$(1)$得$\{\frac{1}{na\_{n}}\}$是公差为$4$的等差数列，首项$\frac{1}{a\_{1}}=8$，
所以$\frac{1}{na\_{n}}=8+4(n−1)=4(n+1)$，
所以$a\_{n}=\frac{1}{4n(n+1)}$，
$$b\_{n}=\frac{(2n+1)^{2}}{4n(n+1)}=1+\frac{1}{4n(n+1)}$$

17．（本小题15分）

已知等差数列$\{a\_{n}\}$的公差为整数，$a\_{3}=9$，设其前$n$项和为$S\_{n}$，且$\{\frac{S\_{n}}{a\_{n}+1}\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列．

$(1)$求$\{a\_{n}\}$的通项公式$;$

$(2)$若$b\_{n}=a\_{2n−1}−80$，求数列$\{|b\_{n}|\}$的前$n$项和$T\_{n}$．

【答案】解：$(1)$设$\left\{a\_{n}\right\}$的公差为$d$，
依题意得$\frac{S\_{2}}{a\_{2}+1}−\frac{S\_{1}}{a\_{1}+1}=\frac{1}{2}$，
所以$\frac{2a\_{3}−3d}{a\_{3}−d+1}−\frac{a\_{3}−2d}{a\_{3}−2d+1}=\frac{1}{2}$，即$\frac{18−3d}{10−d}−\frac{9−2d}{10−2d}=\frac{1}{2}$，
解得$d=4$或$\frac{10}{3}($舍去$)$，
故$a\_{1}=a\_{3}−2d=1$，
$$a\_{n}=1+4(n−1)=4n−3;$$

$(2)$依题意，$b\_{n}=a\_{2n−1}−80=8n−87$，
当$n\leq 10$，$n\in N^{∗}$时，$|b\_{n}|=87−8n$，故$T\_{n}=\frac{(79+87−8n)n}{2}=83n−4n^{2};$
当$n\geq 11$，$n\in N^{∗}$时，$|b\_{n}|=8n−87$，
故$T\_{n}=−b\_{1}−b\_{2}−\cdots −b\_{10}+b\_{11}+b\_{12}+\cdots +b\_{n}$
$$=−2(b\_{1}+b\_{2}+\cdots +b\_{10})+(b\_{1}+b\_{2}+\cdots +b\_{n})$$

$=4n^{2}−83n+860$，
故$T\_{n}=\left\{\begin{matrix}83n−4n^{2},n⩽10\\4n^{2}−83n+860,n⩾11\end{matrix},n\in N^{∗}\right.$．

18. （本小题17分）

已知双曲线$C$的中心为坐标原点，右焦点为$(\sqrt[ ]{7},0)$，且过点$(−4,3)$．

$(1)$求双曲线$C$的标准方程$;$

$(2)$已知点$A(4,1)$，过点$(1,0)$的直线与双曲线$C$的左、右两支分别交于点$M$，$N$，直线$AN$与双曲线$C$交于另一点$P$，设直线$AM$，$AN$的斜率分别为$k\_{1}$，$k\_{2}$．

(ⅰ)求证：$k\_{1}+k\_{2}$为定值$;$

(ⅱ)求证：直线$MP$过定点，并求出该定点的坐标．

【答案】解：$(1)$设双曲线$C$的方程为$\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$，
因为双曲线$C$的右焦点为$(\sqrt[ ]{7},0)$，且过点$(−4,3)$，
所以$\left\{\begin{matrix}a^{2}+b^{2}=7,\\\frac{16}{a^{2}}−\frac{9}{b^{2}}=1,\end{matrix}\right.$其中$0<a<\sqrt[ ]{7}$，解得$\left\{\begin{matrix}a^{2}=4,\\b^{2}=3,\end{matrix}\right.$
双曲线$C$的方程为$\frac{x^{2}}{4}−\frac{y^{2}}{3}=1$．
$(2)(i)$设直线$MN$的方程为$y=k(x−1)$，$M(x\_{1},y\_{1})$，$N(x\_{2},y\_{2})$，
由$\left\{\begin{matrix}y=k(x−1),\\\frac{x^{2}}{4}−\frac{y^{2}}{3}=1,\end{matrix}\right.$得$(3−4k^{2})x^{2}+8k^{2}x−4k^{2}−12=0$，
$x\_{1}+x\_{2}=\frac{−8k^{2}}{3−4k^{2}}$，$x\_{1}x\_{2}=\frac{−4k^{2}−12}{3−4k^{2}}$，
因为直线$MN$与双曲线$C$的左、右支分别交于点$M$，$N$，
所以$\left\{\begin{matrix}3−4k^{2}\ne 0,\\\frac{−4k^{2}−12}{3−4k^{2}}<0\end{matrix}\right.$得$−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}<k<\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，
$$k\_{1}+k\_{2}=\frac{y\_{1}−1}{x\_{1}−4}+\frac{y\_{2}−1}{x\_{2}−4}=\frac{k(x\_{1}−1)−1}{x\_{1}−4}+\frac{k(x\_{2}−1)−1}{x\_{2}−4}$$

$$=\frac{2kx\_{1}x\_{2}−(5k+1)(x\_{1}+x\_{2})+8(k+1)}{x\_{1}x\_{2}−4(x\_{1}+x\_{2})+16}$$

$=\frac{−24k^{2}+24}{−36k^{2}+36}=\frac{2}{3}$，
即$k\_{1}+k\_{2}=\frac{2}{3}$．
$(ii)$由题意知直线$MP$的斜率存在，
则可设直线$MP$的方程为$y=tx+m$，$P(x\_{3},y\_{3})$，
由$\left\{\begin{matrix}y=tx+m,\\\frac{x^{2}}{4}−\frac{y^{2}}{3}=1,\end{matrix}\right.$得$(3−4t^{2})x^{2}−8tmx−4m^{2}−12=0$，
$x\_{1}+x\_{3}=\frac{8tm}{3−4t^{2}}$，$x\_{1}x\_{3}=\frac{−4m^{2}−12}{3−4t^{2}}$，
由$k\_{AP}=k\_{2}$，结合$(i)$可知$k\_{1}+k\_{AP}=\frac{2}{3}$，
$$k\_{1}+k\_{AP}=\frac{y\_{1}−1}{x\_{1}−4}+\frac{y\_{3}−1}{x\_{3}−4}=\frac{(tx\_{1}+m−1)(x\_{3}−4)+(tx\_{3}+m−1)(x\_{1}−4)}{(x\_{1}−4)(x\_{3}−4)}$$

$$=\frac{2tx\_{1}x\_{3}+(m−1−4t)(x\_{1}+x\_{3})−8(m−1)}{x\_{1}x\_{3}−4(x\_{1}+x\_{3})+16}$$

$$=\frac{2t×\frac{−4m^{2}−12}{3−4t^{2}}+(m−1−4t)×\frac{8tm}{3−4t^{2}}−8(m−1)}{\frac{−4m^{2}−12}{3−4t^{2}}−4×\frac{8tm}{3−4t^{2}}+16}$$

$=\frac{32t^{2}+8tm+24(t+m)−24}{64t^{2}+32tm+4m^{2}−36}$．
由$k\_{1}+k\_{AP}=\frac{2}{3}$，得$m^{2}+(5t−9)m+4t^{2}−9t=0$，
即$m=−t$，或$m=−4t+9$，
当$m=−t$时，直线$MP$过点$(1,0)$，不符合题意，舍去，
当$m=−4t+9$时，直线$MP$的方程为$y=t(x−4)+9$，过定点$(4,9)$．

19. （本小题17分）

已知在平面直角坐标系$xOy$中，椭圆$G$的中心在坐标原点$O$，焦点在$x$轴上，焦距等于$2\sqrt[ ]{6}$，离心率为$\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$

$(1)$求椭圆$G$的标准方程$;$

$(2)$若直线$y=\frac{1}{2}x+m(m\ne 0)$与椭圆$G$交于$M$、$N$两点，求证：$|OM|^{2}+|ON|^{2}$为定值$;$

$(3)$记$B$为椭圆上顶点，过点$B$作相互垂直的两条直线$BP$，$BQ$分别与椭圆$G$相交于$P$，$Q$两点$.$设直线$BP$的斜率为$k$且$k>0$，若$|BP|=|BQ|$，求$k$的值．

【答案】解：$(1)$由已知得$c=\sqrt[ ]{6}$，又$e=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}=\frac{c}{a}$，$∴a=2\sqrt[ ]{2}$，又$b^{2}=a^{2}−c^{2}=2$，
所以椭圆$G$的方程为$\frac{x^{2}}{8}+\frac{y^{2}}{2}=1$．
$(2)$依题意，设$M(x\_{1},y\_{1})$，$N(x\_{2},y\_{2})$，联立直线与椭圆$G$有$\left\{\begin{matrix}y=\frac{1}{2}x+m\\x^{2}+4y^{2}=8\end{matrix}\right.$，
消$y$得：$x^{2}+2mx+2m^{2}−4=0$，
当$△=16−4m^{2}>0$，即$m^{2}<4$且$m\ne 0$时，$x\_{1}+x\_{2}=−2m$，$x\_{1}x\_{2}=2m^{2}−4$，
$|OM|^{2}+|ON|^{2}=x\_{1}^{2}+2(1−\frac{x\_{1}^{2}}{8})+x\_{2}^{2}+2(1−\frac{x\_{2}^{2}}{8})=4+\frac{3}{4}(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2})=4+\frac{3}{4}[(x\_{1}+x\_{2})^{2}−2x\_{1}x\_{2}]=4+\frac{3}{4}(4m^{2}−4m^{2}+8)=10$，
所以$|OM|^{2}+|ON|^{2}=10$
$(3)$设$P(x\_{P},y\_{P})$，$N(x\_{Q},y\_{Q})$，设直线$BP$的方程为$y=kx+\sqrt[ ]{2}(k>0)$，
则直线$BQ$的方程为$y=−\frac{1}{k}x+\sqrt[ ]{2}$，
由$\left\{\begin{matrix}\frac{x^{2}}{8}+\frac{y^{2}}{2}=1\\y=kx+\sqrt[ ]{2}\end{matrix}\right.$，消去$y$得$(1+4k^{2})x^{2}+8\sqrt[ ]{2}kx=0$
$∴x\_{P}=\frac{−8\sqrt[ ]{2}k}{1+4k^{2}}∴|BP|=\sqrt[ ]{1+k^{2}}|x\_{B}−x\_{P}|=\frac{8\sqrt[ ]{2}k\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{1+4k^{2}}$，
 由$\left\{\begin{matrix}\frac{x^{2}}{8}+\frac{y^{2}}{2}=1\\y=−\frac{x}{k}+\sqrt[ ]{2}\end{matrix}\right.$得$(1+\frac{4}{k^{2}})x^{2}−\frac{8\sqrt[ ]{2}x}{k}=0$，$∴x\_{0}=\frac{8\sqrt[ ]{2}k}{k^{2}+4}$，
$|BQ|=\sqrt[ ]{1+\frac{1}{k^{2}}}|x\_{B}−x\_{Q}|=\frac{8\sqrt[ ]{2}\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{4+k^{2}}$，
$∵|BP|=|BQ|$，$∴\frac{8\sqrt[ ]{2}\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{4+k^{2}}=\frac{8\sqrt[ ]{2}k\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{1+4k^{2}}$，整理得：$k^{3}−4k^{2}+4k−1=0$，
$∴(k−1)(k^{2}−3k+1)=0$．
$∴k=1$或$k=\frac{3\pm \sqrt[ ]{5}}{2}$．