第8章

概　率

概率是随机事件发生可能性大小的度量．本章首先在必修课程古典概型及概率性质的基础上，进一步研究随机事件的条件概率，建立概率的乘法公式和全概率公式，并用它们计算较复杂事件的概率，体现了将复杂问题化归为简单问题的数学思想．类似于引入函数概念，本章引入随机变量的概念，建立起样本空间到实数集的对应关系，为随机事件的表示带来方便；接着引入分布列的概念，建立起随机变量取值与其概率的对应关系，通过分布列研究了随机变量的两个重要的数字特征——均值(数学期望)和方差．类似于函数模型，本章重点研究了二项分布、超几何分布这两类离散型随机变量的分布，以及正态分布这一连续型随机变量的分布，体会概率模型的作用．本章教学时不要把重点放在单纯的计算上，而应使学生经历运用随机变量刻画随机现象进而解决实际问题的过程．

本章重点提升学生的数学抽象、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析核心素养.

第1课时　条件概率



知识技能

1．结合古典概型，了解条件概率的定义，能计算简单随机事件的条件概率．

2．结合古典概型，了解条件概率与独立性的关系．

3．结合古典概型，会利用乘法公式计算概率．

思想方法

通过条件概率及较复杂概率的计算，体会转化化归思想．

核心素养

1．通过韦恩图理解条件概率的计算公式，发展直观想象素养．

2．通过条件概率公式的推导及运用，发展逻辑推理和数学运算素养．



条件概率定义的理解及计算．



问题导引

预习教材P92～95，思考下面的问题：

1．什么是古典概型？

2．什么是条件概率？

3．由必修概率的知识我们知道，当事件*A*与*B*相互独立时，有*P*(*AB*)＝*P*(*A*)*P*(*B*)．如果事件*A*与*B*不独立，如何表示积事件*AB*的概率呢？

即时体验

1．抛掷一颗质地均匀的骰子，出现的点数是奇数的概率是　　，出现的点数不超过3的概率是　　.

2．判断(正确的打“√”，错误的打“×”)：

(1) 在事件*A*发生的条件下，事件*B*发生的概率可记作*P*(*A*|*B*)；(×)

(2) 对事件*A,B*，有*P*(*B*|*A*)＝*P*(*A*|*B*)；(×)

(3) 对事件*A,B*，有*P*(*AB*)＝*P*(*A*)*P*(*B*)；(×)

(4) 对事件*A,B*，有0≤*P*(*B*|*A*)≤1.(√)

3．抛掷一颗质地均匀的骰子，若已知出现的点数不超过3，则出现的点数是奇数的概率是　　.



一、 问题情境

抛掷一枚质地均匀的硬币2次．

(1)2次都是正面向上的概率是多少？

(2)在已知有1次出现正面向上的条件下，2次都是正面向上的概率是多少？

上述2个问题有什么区别？它们之间有什么关系？

分析：抛掷2次硬币，试验的样本点组成样本空间*Ω*＝{正正，正反，反正，反反}，且所有样本点是等可能的．

(1)记 “抛掷硬币2次，2次都是正面向上”为事件*B*，则*B*＝{正正}，故*P*(*B*) ＝＝.

(2)记 “抛掷硬币2次，有1次出现正面向上”为事件*A*，则*A*＝{正正，正反，反正}，那么，在*A*发生的条件下，*B*发生的概率为＝.

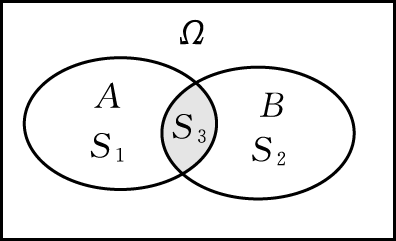
这说明，在事件*A*发生的条件下，事件*B*发生的概率产生了变化，并且事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率实际上是以*A*为样本空间，事件*AB*发生的概率．

二、 数学建构

问题1　什么是条件概率？

对于问题情境中的问题“事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率”，下面以古典概型为例并结合韦恩图进行说明．

设古典概型的样本空间为*Ω*，事件*A*所含样本点的集合为*S*1，事件*B*所含样本点的集合为*S*2，事件*AB*所含样本点的集合为*S*3(如图所示), 则有



*P*(*A*)＝＝，

*P*(*AB*)＝.

因此，事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率是

＝＝.

由此，我们得到：

一般地，设*A, B*为两个事件，*P*(*A*)＞0，我们称为事件***A***发生的条件下事件***B***发生的条件概率[1]，记为*P*(*B*|*A*)，读作“*A*发生的条件下*B*发生的概率”，即

*P*(*B*|*A*)＝(*P*(*A*)＞0)．

注意：(1)公式仅限于*P*(*A*)＞0的情况，当*P*(*A*)＝0时，我们不定义条件概率；

(2)在竖线“︱”之后的部分表示条件，须区分*P*(*B*|*A*)与*P*(*A*|*B*)，*P*(*A*|*B*)与 *P*(*AB*)．

(*P*(*B*|*A*)表示事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率，而*P*(*A*|*B*)表示事件*B*发生的条件下事件*A*发生的概率；*P*(*AB*)表示事件*A*和事件*B*同时发生的概率，无附加条件．*P*(*A*|*B*)与*P*(*B*|*A*)不一定相等)

问题2 如何用条件概率说明两个随机事件的独立性？(事件*A,B*相互独立⇔*P*(*B*|*A*)＝*P*(*B*)，其中*P*(*A*)＞0)

若事件*A,B*相互独立，即*P*(*AB*)＝*P*(*A*)*P*(*B*)，且*P*(*A*)>0，则*P*(*B*|*A*)＝＝＝*P*(*B*)，这就是说，此时事件*B*发生的概率与已知事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率相等，也就是事件*A*发生与否，不影响事件*B*发生的概率．

反过来，若*P*(*B*|*A*)＝*P*(*B*)，且*P*(*A*)>0，则*P*(*B*)＝⇒*P*(*AB*)＝*P*(*A*)*P*(*B*)，即事件*A,B*相互独立.

问题3 如果事件*A*与*B*不独立，如何求积事件*AB*的概率呢？

由条件概率的计算公式*P*(*B*|*A*)＝(*P*(*A*)＞0)可得

*P*(*AB*)＝*P*(*B*|*A*)*P*(*A*)，

此公式即为概率的乘法公式．

同样有，当*P*(*B*)＞0时，*P*(*AB*)＝*P*(*A*|*B*)*P*(*B*)．

意义：两事件乘积的概率等于其中某一事件的概率乘以另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率.

问题4　条件概率有哪些性质？[2]

条件概率是在一定条件下发生的概率，它只是缩小了样本空间，因此条件概率具有概率的一般性质．

条件概率有如下性质：

(1) *P*(*Ω*|*A*)＝1；

(2) *P*(∅|*A*)＝0；

(3) 若*B*1,*B*2互斥，则*P*((*B*1＋*B*2)|*A*)＝*P*(*B*1|*A*)＋*P*(*B*2|*A*)．(条件概率的加法公式)

三、 数学运用

例1　(教材P95例1)抛掷一颗质地均匀的骰子，样本空间 *Ω*＝{1,2,3,4,5,6}，事件*A*＝{2,3,5},*B*＝{1,2,4,5,6}，求*P*(*A*)，*P*(*B*)，*P*(*AB*)，*P*(*A*|*B*)．[3]

(见学生用书课堂本P59)

[处理建议]　在弄清基本事件的基础上，直接应用条件概率的定义计算．

[规范板书]　解　方法1(定义法)：由已知得*AB*＝{2,5}，由古典概型可知

*P*(*A*)＝＝，*P*(*B*)＝，*P*(*AB*)＝＝，

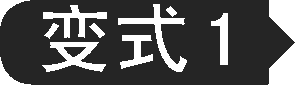
所以由条件概率公式得*P*(*A*|*B*)＝＝.

方法2(缩小样本空间法)：因为*B*＝{1,2,4,5,6}，*AB*＝{2,5}，所以*n*(*B*)＝5, *n*(*AB*)＝2，从而*P*(*A*|*B*)＝＝.

[题后反思]　计算条件概率的两种方法

(1) 公式法：①用字母*A,B*表示事件；②分别计算概率*P*(*AB*)和*P*(*A*)；③利用条件概率公式*P*(*B*|*A*)＝求概率．

(2) 缩小样本空间法：①原来的样本空间*Ω*缩小为事件*A*；②原来的事件*B*缩小为*A*与*B*同时发生的事件*AB*；③利用古典概型概率公式*P*(*B*|*A*)＝求概率．

　在5道试题中有3道代数题和2道几何题，每次从中随机抽出1道题，抽出的题不再放回．求：

(1) 第1次抽到代数题且第2次抽到几何题的概率；

(2) 在第1次抽到代数题的条件下，第2次抽到几何题的概率．

[处理建议]　把“第1次抽到代数题”和“第2次抽到几何题”作为两个事件，问题(1)就是积事件的概率，问题(2)就是条件概率．

[规范板书]　解　设“第1次抽到代数题”为事件*A*，“第2次抽到几何题”为事件*B*.

(1) “第1次抽到代数题且第2次抽到几何题”就是事件*AB*.从5道试题中每次不放回地随机抽取2道，试验的样本空间*Ω*包含的样本点个数*n*(*Ω*)＝A＝5×4＝20.

因为*n*(*AB*)＝A×A＝3×2＝6，所以*P*(*AB*)＝＝.

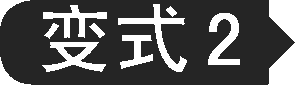
(2) 方法1：“在第1次抽到代数题的条件下，第2次抽到几何题”的概率就是事件*A*发生的条件下，事件*B*发生的概率．显然*P*(*A*)＝.

利用条件概率公式，得*P*(*B*|*A*)＝＝＝.

方法2：在缩小的样本空间*A*上求*P*(*B*|*A*)．已知第1次抽到代数题，这时还余下4道试题，其中代数题和几何题各2道，因此，事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率为

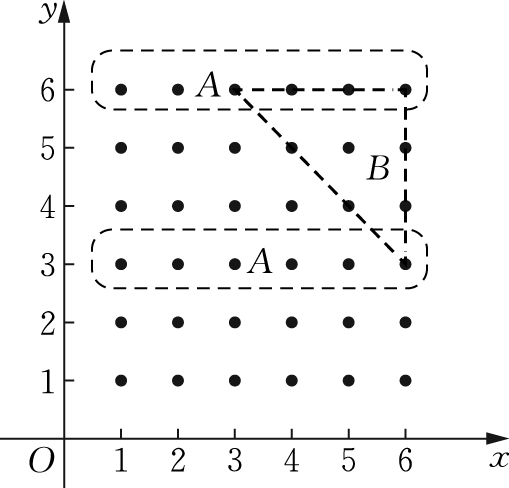
*P*(*B*|*A*)＝＝.

[题后反思]　通过本题(1)(2)两问的求解，注意感受*P*(*AB*)与*P*(*B*|*A*)的区别．

　抛掷红、蓝两颗骰子，记“蓝色骰子的点数为3或6” 为事件*A,* “两颗骰子的点数之和大于8” 为事件*B*，求已知事件*A*发生的条件下事件*B*发生的概率．

[处理建议]　可通过画图解题．

[规范板书]　解　用数对(*x,y*)来表示抛掷结果，其中*x*表示红色骰子的点数，*y*表示蓝色骰子的点数，则样本空间*Ω*＝{(*x,y*)︱*x,y*＝1,2,3,4,5,6}，此样本空间可用图直观表示，图中每一个点代表一个样本点，共有36个样本点．



(变式2)

不难看出，*A*包含的样本点即图中圆框中的点，共12个；*B*包含的样本点即图中三角框(包含边界)中的点，共10个；*AB*包含5个样本点．

方法1：*P*(*A*)＝＝， *P*(*B*)＝＝， *P*(*AB*)＝.

因此，由条件概率公式得

*P*(*B*|*A*)＝＝＝.

方法2：*P*(*B*|*A*)＝＝.

例2　已知某品牌的手机从1m高的地方掉落时，屏幕第一次未碎掉的概率为0.5，当第一次未碎掉时第二次也未碎掉的概率为0.3，试求这样的手机从1m高的地方掉落两次后屏幕仍未碎掉的概率．[4]

(见学生用书课堂本P60)

[规范板书]　解　设*Ai*表示第*i*次掉落手机屏幕没有碎掉，*i*＝1,2，则由已知可得*P*(*A*1)＝0.5,*P*(*A*2|*A*1)＝0.3，因此由概率的乘法公式可得*P*(*A*1*A*2)＝*P*(*A*1)*P*(*A*2|*A*1)＝0.5×0.3＝0.15.

即这样的手机从1m高的地方掉落两次后屏幕仍未碎掉的概率为0.15.

[题后反思]　运用概率的乘法公式解题的一般步骤：(1)首先判断是否可以运用乘法公式求解，即对任意两个事件*A,B*，是否有*P*(*A*)>0；(2)根据已知条件表示出各事件的概率；(3)代入乘法公式*P*(*AB*)＝*P*(*B*|*A*)·*P*(*A*)求出积事件*AB*的概率．

　已知3张奖券中只有1张有奖，甲、乙、丙3名同学依次不放回地各随机抽取1张，他们中奖的概率与抽奖的次序有关吗？

[处理建议]　要知道中奖概率是否与抽奖次序有关，只要考查甲、乙、丙3名同学的中奖概率是否相等．因为只有1张中奖，所以“乙中奖”等价于“甲没中奖且乙中奖”，“丙中奖”等价于“甲和乙都没中奖”，利用乘法公式可求出乙、丙中奖的概率．

[规范板书]　解　用*A,B,C*分别表示甲、乙、丙中奖的事件，则*B*＝*B,C*＝.

*P*(*A*)＝，

*P*(*B*)＝*P*(*B*)＝*P*()*P*(*B*|)＝×＝，

*P*(*C*)＝*P*()＝*P*()*P*(|)＝×＝.

因为*P*(*A*)＝*P*(*B*)＝*P*(*C*)，所以中奖的概率与抽奖的次序无关．

[题后反思]　本题是概率乘法公式的应用题．在抽奖问题上，无论是放回随机抽取还是不放回随机抽取，中奖的概率都与抽奖的次序无关．

例3　在某次考试中，要从20道题中随机抽出6道题，若考生至少能答对其中4道题即可通过，至少能答对其中5道题就获得优秀．已知某考生能答对其中10道题，并且知道他在这次考试中已经通过，求他获得优秀成绩的概率．[5]

[处理建议]　先设出相关事件，注意各事件间的关系，再利用条件概率的性质求解．

[规范板书]　解　记“该考生6道题全答对” 为事件*A,* “该考生答对了其中5道题，另一道答错” 为事件*B,* “该考生答对了其中4道题，另2道题答错” 为事件*C,* “该考生在这次考试中通过” 为事件*D*，“该考生在这次考试中获得优秀” 为事件*E*，则*A, B, C*两两互斥，且*D*＝*A*＋*B*＋*C, E*＝*A*＋*B*，可知

*P*(*D*)＝*P*(*A*＋*B*＋*C*)＝*P*(*A*)＋*P*(*B*)＋*P*(*C*)

＝＋＋＝，

*P*(*AD*)＝*P*(*A*), *P*(*BD*)＝*P*(*B*)，

*P*(*E*|*D*)＝*P*(*A*|*D*)＋*P*(*B*|*D*)＝

＋＝＋＝

＋＝.

故获得优秀成绩的概率为.

[题后反思]　当所求事件的概率相对较复杂时，往往把该事件拆分成两个(或多个)互斥的较简单事件的和，分别求出这些简单事件的概率，再利用性质*P*((*B*＋*C*)|*A*)＝*P*(*B*|*A*)＋*P*(*C*|*A*)即可求解．

四、 课堂练习

1．设*A, B*为两个事件，若*P*(*AB*)＝， *P*(*A*)＝，则*P*(*B*|*A*)等于(D)

A. B.

C. D.

提示　*P*(*B*|*A*)＝＝＝.

2．已知*P*(*B*|*A*)＝，*P*(*A*)＝，那么*P*(*AB*)等于(B)

A. B.

C. D.

提示　*P*(*AB*)＝*P*(*A*) *P*(*B*|*A*)＝.

3．假定生男、生女是等可能的，一个家庭中有两个小孩，已知有一个是女孩，则另一个小孩是男孩的概率是　　.

提示　一个家庭的两个小孩只有4种可能：{男，男}，{男，女}，{女，男}，{女，女}，且所有样本点是等可能的，那么在有一个是女孩的条件下，另一个小孩是男孩的概率为.

4．已知春季里，甲、乙两地每天下雨的概率分别为20%与18%，且两地同时下雨的概率为12%，求春季的一天里：

(1) 已知甲地下雨的条件下，乙地也下雨的概率；

(2) 已知乙地下雨的条件下，甲地也下雨的概率．

解　记“甲地下雨”为事件*A,*“乙地下雨”为事件*B,*则由已知可得

*P*(*A*)＝20%, *P*(*B*)＝18%, *P*(*AB*)＝12%.

(1) 需要求的是*P*(*B*︱*A*)＝＝＝.

(2) 需要求的是*P*(*A*︱*B*)＝＝＝.

五、 课堂小结

1．条件概率公式：*P*(*A*|*B*)＝＝.

注意：(1)分清“在谁的条件下”，求“谁的概率”，即区分*P*(*B*|*A*)与*P*(*A*|*B*)；(2)概率*P*(*B*|*A*)与*P*(*AB*)的区别与联系：*P*(*AB*)表示在样本空间*Ω*中，计算*AB*发生的概率，而*P*(*B*|*A*)表示在缩小的样本空间*ΩA*中，计算*B*发生的概率．用古典概型公式，则*P*(*B*|*A*)＝，*P*(*AB*)＝.

2．概率的乘法公式：*P*(*AB*)＝*P*(*B*|*A*)*P*(*A*)＝*P*(*A*|*B*)*P*(*B*)．

3．条件概率的性质．



[1]条件概率是形式化的定义，计算条件概率实际上是转化为计算两个已知概率的商：*P*(*B*|*A*)＝，*P*(*A*|*B*)＝.

[2] 条件概率的性质较多，教材给出了比较明显的两个结论(性质(1)(2))和经常使用的一个结论(性质(3))．

[3] 通过简单问题的解决，巩固条件概率的计算．

[4] 巩固概率的乘法公式的运用.

[5] 本例是较复杂的条件概率的计算，需要运用条件概率的第三条性质．