

高二年级 9 月联考数学试卷参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. C 2. C 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B 8. D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. ABD 10. ABC 11. BC 12. ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13. $\frac{2\pi}{3}$ 14. $\frac{3}{4}$ 15. $2\sqrt{17}$ 16. $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共计 70 分.

17. 解：(1) 由 $B(2, 0)$, $C(4, 4)$, 得 BC 中点 $D\left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 即 $D(3, 2)$,

$$\text{又 } K_{BC} = \frac{4-0}{4-2} = 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } BC \text{ 边上中垂线方程为 } y-2 = -\frac{1}{2}(x-3),$$

$$\text{即 } x+2y-7=0 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \because K_{AB} = \frac{1-0}{1-2} = -1, K_{AC} = \frac{4-1}{4-1} = 1$$

$$\therefore K_{AB} \cdot K_{AC} = -1, \therefore AB \perp AC \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } |AB| = \sqrt{2}, |AC| = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解：(1) 因为 $c = b\cos A + a\sin B$,

$$\text{由正弦定理得: } \sin C = \sin B \cos A + \sin A \sin B, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\text{所以 } \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin B \cos A + \sin A \sin B$$

$$\text{化简得 } \tan B = 1, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } 0 < B < \pi,$$

$$\text{所以: } B = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \cos \angle BDA = \cos(\pi - \angle CDA) = -\cos \angle CDA = \frac{3}{5},$$

$$\sin \angle BDA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BDA} = \frac{4}{5}.$$

$$\sin \angle BAD = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \angle BDA\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \angle BDA + \cos \angle BDA) = \frac{\sqrt{2}}{10}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{在} \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } AD = \frac{BD \cdot \sin \angle B}{\sin \angle BDA} = 5.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot \sin \angle ADB = \frac{1}{2} \times 1 \times 5 \times \frac{4}{5} = 2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.解: (1) 当直线过原点时满足条件, 此时 $2-a=0$, 解得 $a=2$, 化为 $3x+y=0$.

当直线不过原点时, 则直线斜率为-1, 故 $a+1=1$, 解得 $a=0$, 可得直线 l 的方程为: $x+y+2=0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $3x+y=0$ 或 $x+y+2=0$ 4 分.

$$(2) y=-(a+1)x+a-2, \because l \text{ 不经过第二象限}, \therefore \begin{cases} -(a+1) \geq 0 \\ a-2 \leq 0 \end{cases},$$

解得 $a \leq -1$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1]$ 7 分

$$(3) \text{ 令 } x=0, \text{ 解得 } y=a-2 < 0, \text{ 解得 } a < 2; \text{ 令 } y=0, \text{ 解得 } x=\frac{a-2}{a+1} > 0, \text{ 解得 } a > 2 \text{ 或 } a < -1.$$

综上有 $a < -1$ 9 分

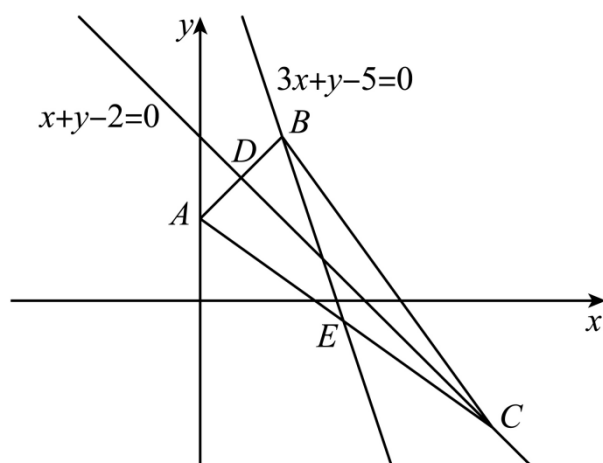
$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |a-2| \left| \frac{a-2}{a+1} \right| = \frac{1}{2} \left| a+1 + \frac{9}{a+1} - 6 \right| = 3 + \frac{1}{2} \left[(-a-1) + \frac{9}{-a-1} \right] \geq 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{(-a-1) \cdot \frac{9}{-a-1}} = 6,$$

当且仅当 $a=-4$ 时取等号.

$\therefore \triangle AOB$ (O 为坐标原点) 面积的最小值是 6, 此时直线方程 $-3x+y+6=0$,

即 $3x-y-6=0$ 12 分

20.解: (1)



因为直线 CD 的斜率为-1, $AB \perp CD$, 所以直线 AB 的斜率为 1,

又因为 $A(0,1)$, 所以直线 AB 的方程为 $y=x+1$,

联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 故点 B 的坐标为 $(1, 2)$5 分

(2) 设点 $C(x_0, y_0)$, 所以 $x_0 + y_0 - 2 = 0$.

因为点 E 是 AC 边的中点, 所以点 E 的坐标为 $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0 + 1}{2}\right)$,

因为 AC 边上的中线 BE 所在直线的方程为 $3x + y - 5 = 0$,

所以 $3 \times \frac{x_0}{2} + \frac{y_0 + 1}{2} - 5 = 0$, 即 $3x_0 + y_0 - 9 = 0$.

联立 $\begin{cases} x_0 + y_0 - 2 = 0 \\ 3x_0 + y_0 - 9 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{7}{2} \\ y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases}$, 所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$,9 分

所以直线 BC 的斜率 $k = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{\frac{7}{2} - 1} = -\frac{7}{5}$,

故直线 BC 的方程为 $y - 2 = -\frac{7}{5}(x - 1)$,

即 $7x + 5y - 17 = 0$ 12 分

21. 解: (1) 显然直线 l 斜率存在, 设直线 l 方程为 $y - 4 = k(x - 3)$,

则直线 l 交 x 轴的正半轴于点 $A\left(3 - \frac{4}{k}, 0\right)$, 交 y 轴的正半轴于点 $B(0, 4 - 3k)$,

于是得 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{4}{k}\right)(4 - 3k) = 24$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$,

所以直线 AB 斜率为 $-\frac{4}{3}$;3 分

(2) 由 (1) 知直线 l 的方程为: $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 3)$, 即 $4x + 3y - 24 = 0$, $B(0, 8)$,

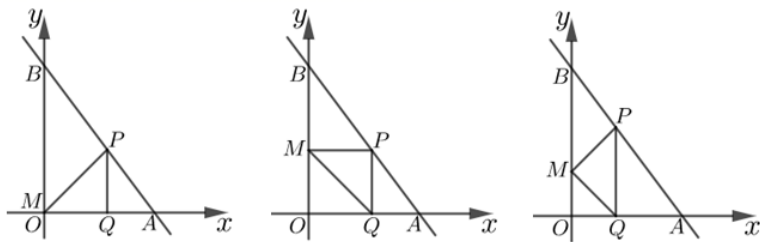
因 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle OQPB}$, 则 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABO}$,

又 $PQ \parallel OB$, 则 $\triangle APQ$ 与 $\triangle ABO$ 相似, 于是有 $\frac{PQ^2}{BO^2} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABO}} = \frac{1}{4}$, 即 $\frac{PQ}{BO} = \frac{1}{2}$, 得 $PQ = 4$,

此时点 P 为线段 AB 中点,

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle OQPB}$ 时, 点 P 为线段 AB 中点, 且 $PQ = 4$;7 分

(3) 假定在 y 轴上存在点 M , 使 $\triangle MPQ$ 为等腰直角三角形, 由 (1) 知直线 l 的方程为: $4x + 3y - 24 = 0$, 如图,



当 $\angle PQM = 90^\circ$ 时，而点 M 在 y 轴上，点 Q 在 x 轴的正半轴上，则 M 必与原点 O 重合，

设 $Q(t, 0)$ ，因 $|MQ| = |PQ|$ ，则 $P(t, t)$ ，于是有 $4t + 3t - 24 = 0$ ，解得 $t = \frac{24}{7} < 6$ ，此时 $M(0, 0)$ ，

当 $\angle MPQ = 90^\circ$ 时，由 $PQ \parallel OB$ ， $|MQ| = |PQ|$ 知四边形 $OMPQ$ 为正方形，

设 $Q(t_1, 0)$ ，则 $P(t_1, t_1), M(0, t_1)$ ，于是有 $4t_1 + 3t_1 - 24 = 0$ ，解得 $t_1 = \frac{24}{7} < 6$ ，此时 $M(0, \frac{24}{7})$ ，

当 $\angle PMQ = 90^\circ$ 时，由 $PQ \parallel OB$ ， $|MQ| = |PQ|$ 得 $\angle OQM = \angle PQM = 45^\circ$ ，即 $|OM| = |OQ|$ ，

设 $Q(t_2, 0)$ ，则 $M(0, t_2)$ ，直线 l 上点 $P(t_2, 8 - \frac{4}{3}t_2)$ ，

显然直线 QM 斜率为 -1 ，则 PM 斜率必为 1 ，即 $\frac{8 - \frac{4}{3}t_2 - t_2}{t_2 - 0} = 1$ ，解得 $t_2 = \frac{12}{5} < 6$ ，此时 $M(0, \frac{12}{5})$ ，

综上， y 轴上存在点 $M(0, 0)$ 或 $M(0, \frac{24}{7})$ 或 $M(0, \frac{12}{5})$ 使 $\triangle MPQ$ 为等腰直角三角形。

.....12 分

22.解：解（1）易知直线 OB 的方程为 $y = \sqrt{3}x$ ，设 $A(m, 0)$ ， $B(n, \sqrt{3}n)$ ， $m, n > 0$ ，

$$\because M(4, \sqrt{3}) \text{ 为线段 } AB \text{ 的中点，则 } \begin{cases} m+n=8 \\ 0+\sqrt{3}n=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=6 \\ n=2 \end{cases}, \text{ 所以 } A(6, 0), B(2, 2\sqrt{3}), \text{ 所以 } k_{AB} = \frac{2\sqrt{3}-0}{2-6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故直线 } AB \text{ 的方程为： } y-0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-6), \text{ 即 } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

（2）设 $A(m, 0)$ ， $B(n, \sqrt{3}n)$ ， $m, n > 0$ 。

$$\text{由 } |AB| = 6, \text{ 得 } \sqrt{(m-n)^2 + (0-\sqrt{3}n)^2} = 6, \text{ 即 } m^2 + 4n^2 - 2mn = 36.$$

$$\because 36 = m^2 + 4n^2 - 2mn \geq 2\sqrt{4m^2n^2} - 2mn = 2mn, \therefore mn \leq 18,$$

当且仅当 $m^2 = 4n^2$ ，即 $m=6$ ， $n=3$ 时取等号，

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} m \times \sqrt{3} n = \frac{\sqrt{3}}{2} mn \leq 9\sqrt{3}$ ，

当 $\triangle OAB$ 面积取最大值时， $A(6,0)$ ， $B(3,3\sqrt{3})$ ，

所以 $k_{AB} = \frac{3\sqrt{3}-0}{3-6} = -\sqrt{3}$ ，直线 AB 的方程为： $y-0 = -\sqrt{3}(x-6)$ ，

即 $y = -\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$8 分

(3) 由题意，直线 AB 斜率不为 0，设 AB 的方程为 $x = my + p$ 。

令 $y=0$ ，得 $x=p$ ，即 $A(p,0)$ ；

令 $y = \sqrt{3}x$ ，得 $\begin{cases} x = \frac{p}{1-\sqrt{3}m} \\ y = \frac{\sqrt{3}p}{1-\sqrt{3}m} \end{cases}$ ，即 $B\left(\frac{p}{1-\sqrt{3}m}, \frac{\sqrt{3}p}{1-\sqrt{3}m}\right)$

$\therefore a = p$ ， $b = \sqrt{\left(\frac{p}{1-\sqrt{3}m}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}p}{1-\sqrt{3}m}\right)^2} = \frac{2p}{1-\sqrt{3}m}$

由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 得： $\frac{1}{p} + \frac{1-\sqrt{3}m}{2p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $p = \sqrt{3} - m$ ，

$\therefore AB$ 的方程为 $x = my + (\sqrt{3} - m)$ ，即 $x = m(y-1) + \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 直线 AB 恒过定点 $(\sqrt{3}, 1)$12 分