

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第二学期高二数学暑假作业 2

完成时间：2022 年 7 月 3 日 完成时长：120min

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x | |x - 1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$

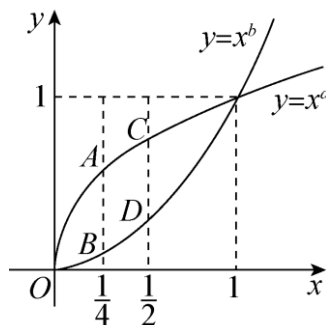
2. 若 $(x - a)^2 < 4$ 成立的一个充分不必要条件是 $1 + \frac{1}{2-x} \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 $()$

- A. $(-\infty, 4]$ B. $[1, 4]$ C. $(1, 4)$ D. $(1, 4]$

3. 已知幂函数 $y = x^a$ 与 $y = x^b$ 的部分图象如图所示, 直线 $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ 与 $y = x^a$, $y = x^b$ 的图象分别交于 A 、 B 、

C 、 D 四点, 且 $|AB| = |CD|$, 则 $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} = ()$

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$



4. 盒中装有除颜色外完全相同的 3 个红球、2 个白球. 甲从中随机取出两个球, 在已知甲取出的有红球的条件下, 他取出两个红球的概率为 $()$

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 已知 $\log_2 a = 0.5^a = 0.2^b$, 则 $()$

- A. $a < 1 < b$ B. $1 < a < b$
C. $b < 1 < a$ D. $1 < b < a$

6. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法, 它是以神经网络为出发点的. 在神经网络优化中, 指数衰减的学习率模型为 $L = L_0 D^{\frac{G}{G_0}}$, 其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率, L_0 表示初始学习率, D 表示衰减系数, G 表示训练迭代轮数, G_0 表示衰减速度. 已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.5, 衰减速度为 22, 且当训练迭代轮数为 22 时, 学习率衰减为 0.45, 则学习率衰减到 0.05 以下 (不含 0.05) 所需的训练迭代轮数至少为 $()$ (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$)

A. 11

B. 22

C. 227

D. 481

7. 某校为了提倡素质教育, 丰富学生们的课外生活, 分别成立绘画、象棋和篮球等三个兴趣小组. 现由甲、乙、丙、丁、戊五名同学报名参加, 每人仅参加一个兴趣小组, 每个兴趣小组至少有一个人报名, 且甲不能参加绘画, 则不同的报名方法有()

A. 72

B. 100

C. 114

D. 150

8. (2022 年全国新高考 2 卷第 8 题) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = ()$

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

二、多选题

9. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则()

A. $ab \geq \frac{1}{4}$ B. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ C. $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2}$ D. $a + \ln b > 0$

10. 甲盒中有 3 个红球, 2 个白球; 乙盒中有 2 个红球, 3 个白球. 先从甲盒中随机取出一球放入乙盒. 用事件 A 表示“从甲盒中取出的是红球”, 用事件 B 表示“从甲盒中取出的是白球”; 再从乙盒中随机取出一球, 用事件 C 表示“从乙盒中取出的是红球”, 则下列结论正确的是()

A. 事件 B 与事件 C 互斥事件B. 事件 A 与事件 C 是独立事件C. $P(C) = \frac{13}{30}$ D. $P(C|A) = \frac{1}{2}$

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x-1)$ 为奇函数, $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$, 则下列结论正确的是()

A. $f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{8}{9}$ B. $f(x)$ 在 $(6, 8)$ 上 减函数C. 点 $(3, 0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心D. 方程 $f(x) + \lg x = 0$ 仅有 6 个实数解

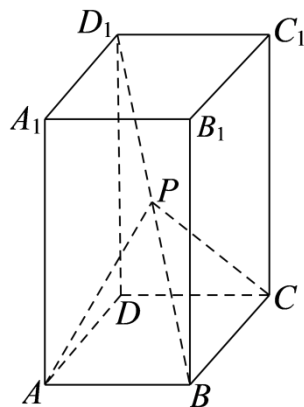
12. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $|AB|=|AD|=1$, $|AA_1|=2$, 动点 P 在体对角线 BD_1 上 (含端点), 则下列结论正确的有 ()

A. 当 P 为 BD_1 中点时, $\angle APC$ 为锐角

B. 存在点 P , 使得 $BD_1 \perp$ 平面 APC

C. $|AP|+|PC|$ 的最小值 $2\sqrt{5}$

D. 顶点 B 到平面 APC 的最大距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$



三、填空题

13. 甲、乙两名乒乓球运动员进行乒乓球单打比赛, 根据以往比赛的胜负情况知道, 每一局甲胜的概率为 $\frac{3}{4}$, 乙胜的概率为 $\frac{1}{4}$, 如果比赛采用“五局三胜”制(先胜三局者获胜), 则甲获胜的概率为_____.

14. 购买某种意外伤害保险, 每个投保人年度向保险公司交纳保险费 20 元, 若被保险人在购买保险的一年度内出险, 可获得赔偿金 50 万元. 已知该保险每一份保单需要赔付的概率为 10^{-5} , 某保险公司一年能销售 10 万份保单, 且每份保单相互独立, 则一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率约为_____;

一年度内盈利的期望为_____万元. (参考数据: $(1-10^{-5})^{10^5} \approx 0.37$)

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \lg(2x+1), & x \geq 0 \\ \lg(1-2x), & x < 0 \end{cases}$, 若不等式 $f(ax-1) < f(x-2)$ 在 $[2, 3]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 若函数 $f(x) = \ln x - kx + 2$ 有两个不同零点 $m, n (m < n)$, 且存在唯一的整数 $x_0 \in (m, n)$, 则实数 k 的取值范围为_____.

四、解答题

17. 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | |x + 1| > 1\}$, $B = \{x | x^2 + (m + 1)x + 3m < 0\}$.

(1) 求集合 A ; (2) 若 $B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围; (3) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知奇函数 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ 的定义域为 $[-a - 2, b]$

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明;

(3) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $2 + mf(x) + 2^x > 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

19.(2021 湖北省孝感市 同步练习)据调查,目前对于已经近视的小学生,有两种配戴眼镜的选择,一种是佩戴传统的框架眼镜;另一种是佩戴角膜塑形镜,这种眼镜是晚上睡觉时佩戴的一种特殊的隐形眼镜(因其在一定程度上可以减缓近视的发展速度越来越多的小学生家长选择角膜塑形镜控制孩子的近视发展),A 市从该地区小学生中随机抽取容量为 100 的样本,其中因近视佩戴眼镜的有 24 人(其中佩戴角膜塑形镜的有 8 人,其中 2 名是男生,6 名是女生).

(1)若从样本中选一位学生,已知这位小学生戴眼镜,那么,他戴的是角膜塑形镜的概率是多大?

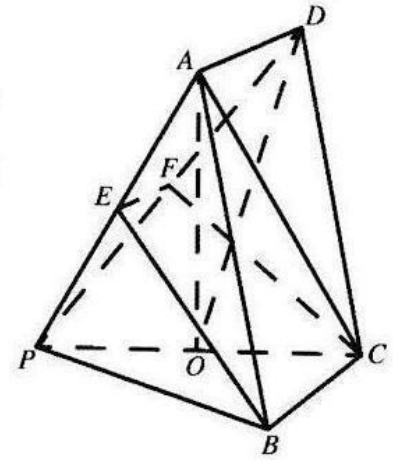
(2)从这 8 名戴角膜塑形镜的学生中,选出 3 个人,求其中男生人数 X 的分布列;

(3)若将样本的频率当做估计总体的概率,请问,从 A 市的小学生中,随机选出 20 位小学生,求佩戴角膜塑形镜的人数 Y 的期望和方差.

20. 如图, 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, 侧面 PBC 是以 PC 为斜边的直角三角形, O 为 PC 的中点, $PB = 8$, $BC = 6$, $AP = AB = AC = 13$.

(1) 求证: 直线 $AO \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若过 BC 的平面 α 与侧棱 PA , PD 的交点分别为 E , F , 且 $EF = 3$, 求直线 DO 与平面 α 所成角的正弦值.



21. 某市举办了一次“诗词大赛”，分预赛和复赛两个环节，已知共有 20000 名学生参加了预赛，现从参加预赛的全体学生中随机地抽取 100 人的预赛成绩作为样本，得到如下的统计数据.

得分（百分制）	[0, 20)	[20, 40)	[40, 60)	[60, 80)	[80, 100]
人数	10	20	30	25	15

(1) 规定预赛成绩不低于 80 分为优良，若从样本中预赛成绩不低于 60 分的学生中随机地抽取 2 人，求恰有 1 人预赛成绩优良的概率；

(2) 由样本数据分析可知，该市全体参加预赛学生的预赛成绩 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 可近似为样本中的 100 名学生预赛成绩的平均值（同一组数据用该组数据的中间值代替），且 $\sigma^2 = 361$. 利用该正态分布，估计全市参加预赛的全体学生中预赛成绩不低于 72 分的人数；

(3) 预赛成绩不低于 91 分的学生将参加复赛，复赛规则如下：

①参加复赛的学生的初始分都设置为 100 分；

②参加复赛的学生可在答题前自己决定答题数量 n ，每一题都需要“花”掉一定分数来获取答题资格（即用分数来买答题资格），规定答第 k 题时“花”掉的分数为 $0.2k (k=1, 2, n)$ ；

③每答对一题得 2 分，答错得 0 分；

④答完 n 题后参加复赛学生的最终分数即为复赛成绩.

已知学生甲答对每道题的概率均为 0.75，且每题答对与否都相互独立，则当他的答题数量 n 为多少时，他的复赛成绩的期望值最大？

参考数据：若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

22. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a, & x \in [1, +\infty) \\ 2x + \frac{a}{x}, & x \in (0, 1) \end{cases}$

- (1) 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围；
- (2) 方程 $f(x) = 1$ 有三个不同的实数根，求实数 a 的取值范围；
- (3) 是否存在实数 a 使函数 $f(x) \geq (x - 2a)$ 恒成立，若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由.