

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度高二数学第二学期周练 11 试卷

测试范围：集合与简易逻辑、不等式、函数导数、空间向量、计数原理、概率、统计

命题人：陆烽琴

审题人：鲁媛媛

时间：2022 年 6 月 18 日

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 已知集合 $\{x|y = \ln(x-2)\}$, $B = \{x|x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, 则 $A \cup B = ()$

- A. $[1,3]$ B. $(2,3]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

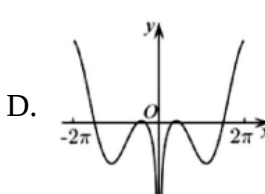
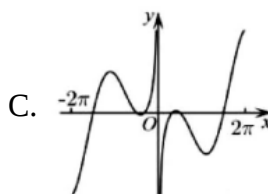
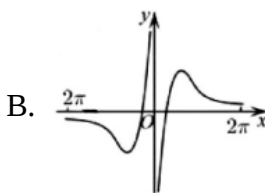
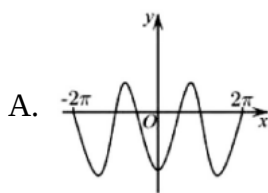
2. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 若 $P(X \leq 0) = 0.2$, 则 $P(X < 2) = ()$

- A. 0.2 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.8

3. 不等式 $x - \frac{1}{x} > 0$ 成立的一个充分条件是 $()$

- A. $x < -1$ B. $x > -1$ C. $-1 < x < 0$ D. $0 < x < 1$

4. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ 在其定义域上的图象大致是 $()$



5. 第24届冬季奥运会将于2022年2月4日至2022年2月20日在北京市和河北省张家口市举行.

现要安排甲、乙、丙、丁四名志愿者去国家高山滑雪馆, 国家速滑馆, 首钢滑雪大跳台三个场馆参加活动, 要求每个场馆都有人去, 且这四人都在这三个场馆, 则甲和乙都没被安排去首钢滑雪大跳台的方案种数为 $()$

- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

6. $(2^x - 1)(2 - 2^x)^5$ 的展开式中 8^x 的系数为 $()$

- A. 120 B. 80 C. 60 D. 40

7. 已知 $a = \frac{1}{e}$, $b = \frac{\ln 3}{5}$, $c = \frac{\ln 2}{3}$, 则 $()$

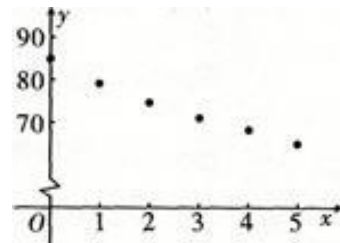
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

8. 已知实数 $a, b \in (1, +\infty)$, 且 $2(a+b) = e^{2a} + 2\ln b + 1$, e 为自然对数的底数, 则()

- A. $1 < b < a$ B. $a < b < 2a$ C. $2a < b < e^a$ D. $e^a < b < e^{2a}$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 中国茶文化博大精深, 茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 为了建立茶水温度 y 随时间 x 变化的函数模型, 小明每隔 1 分钟测量一次茶水温度, 得到若干组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 绘制了如图所示的散点图. 小明选择了如下 2 个函数模型来拟合茶水温度 y 随时间 x 的变化情况, 函数模型一:



$y = kx + b (k < 0, x \geq 0)$; 函数模型二: $y = ka^x + b (k > 0, 0 < a < 1, x \geq 0)$, 下列说法正确的是()

- A. 变量 y 与 x 具有负的相关关系
 B. 由于水温开始降得快, 后面降得慢, 最后趋于平缓, 因此模型二能更好的拟合茶水温度随时间的变化情况
 C. 若选择函数模型二, 利用最小二乘法求得到 $y = ka^x + b$ 的图象一定经过点 $(\bar{x}, \bar{y})$
 D. 当 $x = 5$ 时, 通过函数模型二计算得 $y = 65.1$, 用温度计测得实际茶水温度为 65.2, 则残差为 0.1

10. 已知正实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则下列不等式恒成立的是()

- A. $a + 4b \geq 9$ B. $ab \geq 4$ C. $a^2 + b^2 \leq 8$ D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{2}$

11. 设 $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, $x \in R$, $n \in N^*$, 则下列结论中正确的是()

- A. $-\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_3}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{a_n}{2^n} = 2^n - 1$
 B. 当 $n \geq 3$ 时, $2a_2 + 6a_3 + \dots + n(n-1)a_n = 4n(n-1)$
 C. 若 $|a_8| > |a_7|, |a_8| > |a_9|$, 则 $n = 12$
 D. 当 $x = -\frac{1}{2000}, n = 2022$ 为时, 则 $(1-2x)^n > \frac{109}{15}$

12. 对于函数 $y = f(x)$, 若存在 x_0 , 使 $f(x_0) = -f(-x_0)$, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 与

点 $(-x_0, f(-x_0))$ 为函数 $f(x)$ 一对“和谐点”. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x - x - 2, & x > 0 \\ -ax^2 - 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$

则下列说法正确的是().

A. $f(x)$ 可能有三对“和谐点” B. 若 $a = 1$, 则 $f(x)$ 有一对“和谐点”

C. 若 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 有两对“和谐点”

D. 若 $a < 0$, 对 $\forall x_1 > 0$, 总 $\exists x_2 \leq 0$, 使 $f(x_1) + f(x_2) = 0$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 命题“ $\forall x > 0, 2^x > 1$ ”的否定是_____.

14. $(1 - \frac{y}{x})(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____(用数字作答).

15. 春节临近, 某火车站三个安检入口每天通过的旅客人数(单位: 人)均服从正态分布 $N(1000, \sigma^2)$, 若 $P(900 < X \leq 1100) = 0.6$, 假设三个安检入口均能正常工作, 则这三个安检入口每天至少有两个超过1100人的概率为_____.

16. 若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 x_2}$, 则 m 的最小值是_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 在 $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 只有第4项的二项式系数最大.

(1) 写出正整数 n 的值(不需要具体过程);

(2) 求展开式中的常数项;

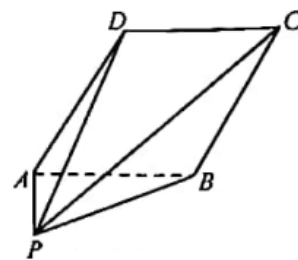
(3) 展开式中各项二项式系数之和记为 A , 各项系数之和记为 B , 求 $A + B$.

18. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形,

$\triangle PAB$ 是边长为2的等边三角形, $PD \perp AB$, $PD = \sqrt{6}$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAB 和平面 PCD 所成锐二面角的大小.



19. 为了解本市高考复习备考情况, 市教研机构组织了一次模拟考试, 随机抽取了部分同学成绩, 研究发现, 本次检测的模拟成绩为 X , $X \sim N(480, 4900)$.

(1) 根据以往的统计数据, 考试成绩能达到升本科分数要求的同学约占39.74%, 据此本次检测成绩达到本科的成绩大约是多少分? (精确到个位)

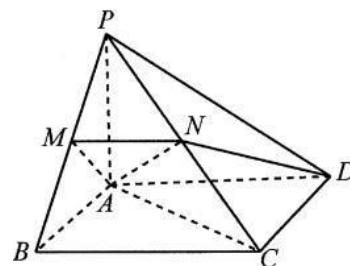
(2) 已知本市考生约有20000名, 某学生此次模拟考试成绩为496分, 则该学生全市排名大约是多少名?

(说明: $P(x > x_1) = 1 - \Phi(\frac{x_1 - u}{\sigma})$ 表示 $x > x_1$ 的概率, $\Phi(\frac{x_1 - u}{\sigma})$ 用来将非标准正态分布化为标准正态分布, 即 $X \sim N(0, 1)$, 从而利用标准正态分布表 $\Phi(x_0)$, 求当 $x > x_1$ 时的概率 $P(x > x_1)$, 这里 $x_0 = \frac{x_1 - u}{\sigma}$. 相应的 x_0 的值 $\Phi(x_0)$ 是指总体取值小于 x_0 的概率, 即 $\Phi(x_0) = P(x < x_0)$. 参考数据: $\Phi(0.26) = 0.6026$, $\Phi(0.23) = 0.5910$)

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 M, N 分别为线段 PB, PC 上的点, $MN \perp PB$.

(1) 求证: 当点 M 不与点 P, B 重合时, M, N, D, A 四点共面.

(2) 当 $PA = AB = 2$, 二面角 $C-AN-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时, 求 PN 的长.



21. 公元1651年, 法国学者德梅赫向数学家帕斯卡请教了一个问题: 设两名赌徒约定谁先赢满4局, 谁便赢得全部赌注 a 元, 已知每局甲赢的概率为 p ($0 < p < 1$), 乙赢的概率为 $1 - p$, 且每局赌博相互独立, 在甲赢了2局且乙赢了1局后, 赌博意外终止, 则赌注该怎么分才合理? 帕斯卡先和费尔马讨论了这个问题, 后来惠更斯也加入了讨论, 这三位当时欧洲乃至全世界著名的数学家给出的分配赌注的方案是: 如果出现无人先赢4局且赌博意外终止的情况, 则甲、乙按照赌博继续进行下去各自赢得全部赌注的概率之比 $P_1 : P_2$ 分配赌注. (友情提醒: 珍爱生命, 远离赌博)

(1) 若 $a = 243$, $p = \frac{2}{3}$, 甲、乙赌博意外终止, 则甲应分得多少元赌注?

(2) 若 $p \geq \frac{4}{5}$, 求赌博继续进行下去甲赢得全部赌注的概率 $f(p)$, 并判断“赌博继续进行下去乙赢得全部赌注”是否为小概率事件(发生概率小于0.05的随机事件称为小概率事件).

22. 已知函数 $f(x) = e^x + \cos x - ax$ ($a \in R$).

(1) 当 $a = 1$ 时, 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 当 $a = e$ 时, 若 $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ ($x_1 \neq x_2$), $f(x_1) = f(x_2)$, 且 $f(x)$ 的极值在 $x = x_0$ 处取得, 证明: $x_1 + x_2 < 2x_0$.