江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习（4）

班级___________ 姓名___________ 学号 ________

1、已知圆C_1圆心为原点，且与直线 $3x+4y-10=0$ 相切，直线l过点$M(1,2)$.

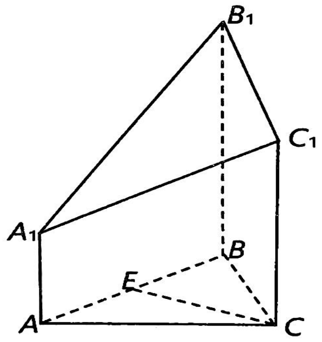
(1)求圆C_1的标准方程；

(2)若直线l被圆C_1所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线l的方程.

2、如图，在几何体$ABC-A_1B_1C_1$中，底面$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形，$AA_1\perp$平面ABC，$AA_1// BB_1// CC_1$，且 $6AA_1=2BB_1=3CC_1=6$，E是AB的中点.

(Ⅰ)求证：CE //平面$A_1B_1C_1$；

(Ⅱ)求平面$A_1B_1C_1$和平面A_1C_1A的夹角的余弦值.



午间练习（4）答案

1、【答案】解：(1)圆心$(0,0)$到直线 $3x+4y-10=0$ 的距离$d=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$，

所以圆C_1的半径为 2，所以圆C_1的标准方程为$x^2+y^2=4$；

(2)当直线斜率不存在时，$x=1$，直线l被圆C_1所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，符合题意；

当直线斜率存在时，设直线$l: y-2=k(x-1)$，

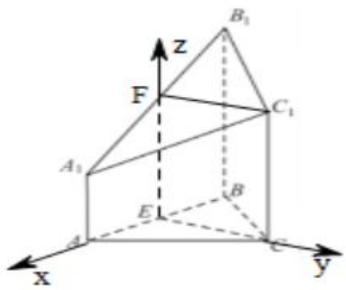
由$(\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}})^2+(\sqrt{3})^2=4$，解得：$k=\frac{3}{4}$，

故l的方程是$y-2=\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x-4y+5=0$，

综上所述，直线l的方程为 $3x-4y+5=0$ 或$x=1$.

3、【答案】(1)证明：因为$\triangle ABC$为正三角形，E为AB的中点，则$CE\perp AB$，

又$AA_1=1$，$BB_1=3$，$CC_1=2$，



取A_1B_1的中点F，连接C_1F，EF，所以$EF=\frac{AA_1+BB_1}{2}=2=CC_1$，又$EF//AA_1//BB_1//CC_1$，

故 $EF//CC_1$，又$EF=CC_1$，

所以四边形EFC_1C为平行四边形，

则$CE//C_1F$，因为$C_1F\subset$平面$A_1B_1C_1$，$CE\not\subset$平面$A_1B_1C_1$，

故 $CE//$平面$A_1B_1C_1$；

(2)解：以点E为坐标原点建立空间直角坐标系，如图所示，

则$B_1(-1,0,3), A_1(1,0,1), C_1(0,\sqrt{3},2), A(1,0,0)$，

所以$\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,0,2), \overrightarrow{B_1C_1}=(1,\sqrt{3},-1)$，

设平面$A_1B_1C_1$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x+2z=0\\ x+\sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，

令$x=1$，则$z=1$，故$\vec{n}=(1,0,1)$，

同理求出平面AA_1C_1的一个法向量为$\vec{m}=(\sqrt{3},1,0)$，

所以$|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+1}\times\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

故平面$A_1B_1C_1$和平面A_1C_1A的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

江苏省仪征中学2021-2022学年第二学期高二数学午间练习（5）

班级__________　姓名__________　学号 ________

1、已知椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，且椭圆上一点与椭圆的两个焦点构成的三角形的周长为$6+4\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆M的方程；

(Ⅱ)设直线l：$x=ky+m$与椭圆M交手A，B两点，若以AB为直径的圆经过椭圆的右顶点C，求m的值.

2、数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(Ⅰ)设$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明$\{b_n\}$是等差数列；

(Ⅱ)求$\{a_n\}$的通项公式.

午间练习（5）答案

1、【答案】解：(Ⅰ)因为椭圆M上一点和它的两个焦点构成的三角形周长为 $6+4\sqrt{2}$，

所以 $2a+2c=6+4\sqrt{2}$，又椭圆的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

即$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以$c=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，

所以$a=3$，$c=2\sqrt{2}$．所以$b=1$，

椭圆M的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$;

(Ⅱ)由$\begin{cases}x=ky+m\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}$，消去$x$得$(k^2+9)y^2+2kmy+m^2-9=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则有$y_1+y_2=-\frac{2km}{k^2+9}$，$y_1y_2=\frac{m^2-9}{k^2+9}$．①

因为以AB为直径的圆过点C，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$．

由 $\overrightarrow{CA}=(x_1-3,y_1),\overrightarrow{CB}=(x_2-3,y_2)$，得 $(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=0$．

将$x_1=ky_1+m$，$x_2=ky_2+m$代入上式，

得 $(k^2+1)y_1y_2+k(m-3)(y_1+y_2)+(m-3)^2=0$．

将 ①代入上式，解得 $m=\frac{12}{5}$或$m=3$．

2、【答案】解：(Ⅰ)由$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$，

得$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$，由$b_n=a_{n+1}-a_n$，得$b_{n+1}=b_n+2$，

即$b_{n+1}-b_n=2$，又$b_1=a_2-a_1=1$，

所以$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列;

(Ⅱ)由(Ⅰ)得，$b_n=1+2(n-1)=2n-1$，

由$b_n=a_{n+1}-a_n$得，$a_{n+1}-a_n=2n-1$，

则$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=5$，…，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1$，

所以累加可得：$a_n-a_1=1+3+5+\ldots+[2(n-1)-1]$

$=\frac{(n-1)(1+2n-3)}{2}=(n-1)^2$，

又$a_1=1$，

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(n-1)^2+1=n^2-2n+2$．

江苏省仪征中学2021-2022学年第二学期高二数学午间练习（6）

班级__________ 姓名__________ 学号 ________

1、在“①函数$f(x)$的图象在点$(2,f(2))$处的切线斜率为$2a$;②函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线与直线$\frac{1}{2}x+y+1=0$垂直;③函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线与直线$4x-y=0$平行”这三个条件中任选一个，补充在下面问题(1)中，求出实数a的值.

已知函数$f(x)=x^2+2aln\,x$.

(1)若_____，求实数a的值;

(2)若函数$g(x)=\frac{2}{x}+f(x)$在$[1,2]$上是减函数，求实数a的取值范围.

2、函数$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$，若$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$6x-y-5=0$.

(1)求a，b的值；

(2)求函数$f(x)$的单调区间.

午间练习（6）答案

1、【答案】解：(1)若选①，对$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+\frac{2a}{x}=\frac{2x^2+2a}{x}$，

由已知$f'(2)=2a$，得$\frac{8+2a}{2}=2a$，解得$a=4$．

若选②，对$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+\frac{2a}{x}=\frac{2x^2+2a}{x}$，直线$\frac{1}{2}x+y+1=0$的斜率为$-\frac{1}{2}$，

由题意得$f'(1)=2$，得$2+2a=2$，解得$a=0$．

若选③，对$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+\frac{2a}{x}=\frac{2x^2+2a}{x}$，直线$4x-y=0$的斜率为4，

由题意得$f'(1)=4$，得$2+2a=4$，解得$a=1$．

(2)对$g(x)=\frac{2}{x}+x^2+2a\ln x$求导，得$g'(x)=-\frac{2}{x^2}+2x+\frac{2a}{x}$.

由函数$g(x)$在$[1,2]$上是减函数，可得$g'(x)\le 0$在$[1,2]$上恒成立，

即$-\frac{2}{x^2}+2x+\frac{2a}{x}\le 0$在$[1,2]$上恒成立，即$a\le\frac{1}{x}-x^2$在$[1,2]$上恒成立．

令$h(x)=\frac{1}{x}-x^2$，$x\in[1,2]$，当$x\in[1,2]$时，$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-2x<0$，

由此知$h(x)$在$[1,2]$上为减函数，所以$h(x)_{min}=h(2)=-\frac{7}{2}$，故$a\le-\frac{7}{2}$.

于是实数a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right]$.

2、【答案】解：(1) $f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)\cdot e^{-x}=[-x^2+(2-a)x+a-b]e^{-x}$，$\therefore f'(0)=a-b$，又$f(0)=b$，

$\therefore f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y-b=(a-b)x$，即$(a-b)x-y+b=0$，

$\therefore \begin{cases}a-b=6,\\ b=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-5.\end{cases}$

(2) $\because f(x)=(x^2+x-5)e^{-x}$，$x\in R$，

$\therefore f'(x)=(-x^2+x+6)e^{-x}=-(x+2)(x-3)e^{-x}$，

当$x<-2$或$x>3$时，$f'(x)<0$；当$-2<x<3$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(-2,3)$，单调递减区间是$(-\infty,-2)$，$(3,+\infty)$．

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习（7）

班级___________　姓名___________　学号 ________

1、设函数$f(x)=x^2-a\ln x$，曲线$y=f(x)$在$x=2$处的切线与直线$2x+7y+1=0$垂直.

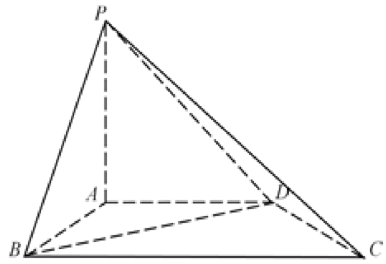
(1)求$f(x)$的解析式；

(2)设曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线为l，求l与两直线$x=0$和$y=-x+1$所围成的三角形的面积.

2、如图，在四棱锥$P-\mathrm{ABCD}$中，$\mathrm{PA}\perp$平面$ABCD$，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AD}$，$\mathrm{AD}//\mathrm{BC}$，$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=1$.

(Ⅰ)若直线PB与CD所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$，求BC的长；

(Ⅱ)求二面角$B-\mathrm{PD}-A$的余弦值.



午间练习（7）答案

1、【答案】解：(1)$f'(x)=2x-\frac{a}{x}$,

因$y=f(x)$在$x=2$处的切线与直线$2x+7y+1=0$垂直，所以在$x=2$处的切线斜率为$\frac{7}{2}$,

所以$f'(2)=2\times 2-\frac{a}{2}=\frac{7}{2}$，解得$a=1$，所以$f(x)=x^2-\ln x$.

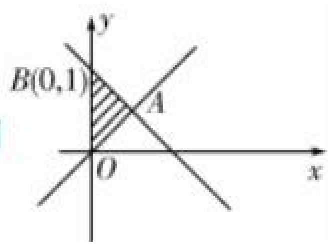
(2)由(1)得$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，所以$k_l=1$，切点为$(1,1)$，

所以直线$l: y=x$，

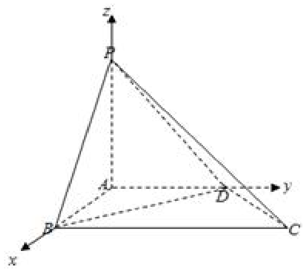
$y=-x+1$与y轴交点$B(0,1)$，

$y=x$与$y=-x+1$交点$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

如图：所以$S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.



2、【答案】解：(Ⅰ)由题意，以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$为单位正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，



如图：因为$AP=AB=AD=1$，

所以$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$.

设$C(1,y,0)$，则$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,1-y,0)$.

因为直线PB与CD所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$，所以$|\cos<\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CD}>|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{1}{2}$,

即$\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{1+(1-y)^2}}=\frac{1}{2}$，解得$y=2$或$y=0$(舍)，所以$C(1,2,0)$，所以$BC$的长为2；

(Ⅱ)设平面PBD的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$．因为$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x-z=0,\\ y-z=0,\end{cases}$令$x=1$，则$y=1$，$z=1$，

所以$\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$，因为平面$PAD$的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$.

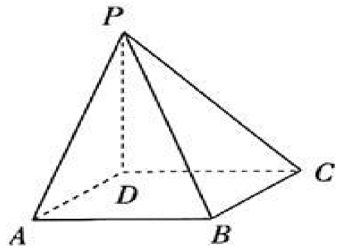
所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以由图可知二面角$B-PD-A$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习（8）

班级___________ 姓名___________ 学号 ________

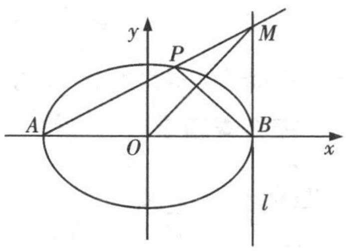
1、在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$为菱形，$PD=DC=a$，PB与底面$ABCD$所成角为 45°.



(1)求二面角$D-PC-B$的余弦值；

(2)求点C到平面PAB的距离.

2、已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$E(1,\frac{3}{2})$.



(1)求椭圆C的方程.

(2)若点A，B分别是椭圆的左、右顶点，直线l经过点B且垂直于x轴，点P是椭圆上异于A，B的任意一点，直线AP交l于点M，如图所示.设直线OM的斜率为k_1，直线BP的斜率为k_2，求证：k_1k_2为定值.

午间练习（8）答案

1、【答案】解：(1)由已知得$\angle PBD$为PB与底面$ABCD$所成角为45°，

所以$\angle PBD = 45°$，所以由已知有$BD = PD = AB = BC = DC = a$，

取AB的中点E，连接DE，则$DE \perp AB, DE \perp DC, DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，

以$\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}$方向上的单位向量建系$D - xyz$，

$D(0,0,0), A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right), C(0, a, 0), P(0,0,a)$，

$\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right), \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, a\right)$，

设平面PBC的法向量$\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB} = 0\end{cases}$取$\vec{n} = (\sqrt{3}, 3, 3)$,

又面PCD的法向量$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0, 0\right)$，

所以$\cos < \overrightarrow{DE}, \vec{n} > = \frac{\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$，即二面角$D - PC - B$的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$;

(2)设平面PAB的法向量$\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB} = -\frac{\sqrt{3}}{2}ax_2 - \frac{1}{2}ay_2 + az_2 = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB} = ay_2 = 0\end{cases}$

取$\vec{m} = (2, 0, \sqrt{3})$，故点$C$到平面$PAB$的距离$\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

2、【答案】(1)解：∵椭圆$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$E(1, \frac{3}{2})$，

由$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$解得$a = 2$，$b = \sqrt{3}$，∴椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2)证明：由(1)，得$A(-2,0)$，$B(2,0)$．设$P(x_1, y_1)(y_1 \neq 0)$，$M(2, y_0)$，

则$k_1 = \frac{y_0}{2}$，$k_2 = \frac{y_1}{x_1 - 2}$，∵ A，P，M三点共线，

$\therefore y_0 = \frac{4y_1}{x_1 + 2}$，$\therefore k_1k_2 = \frac{y_0y_1}{2(x_1 - 2)} = \frac{2y_1^2}{x_1^2 - 4}$．∵ $P(x_1, y_1)$在椭圆C上，

$\therefore y_1^2 = \frac{3}{4}(4 - x_1^2)$，

$\therefore k_1k_2 = \frac{2y_1^2}{x_1^2 - 4} = -\frac{3}{2}$，为定值．